



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Metodologie innovative per scremare l'insieme di potenziali candidati di onde gravitazionali continue nell'era dei rivelatori avanzati LIGO-Virgo

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Candidato  
Giuseppe Intini  
Matricola 1227552

Relatore  
Dr.ssa Paola Leaci

Correlatore  
Prof. Sergio Frasca

Anno Accademico 2015/2016

---

**Metodologie innovative per scremare l'insieme di potenziali candidati di onde gravitazionali continue nell'era dei rivelatori avanzati LIGO-Virgo**

Tesi di Laurea Magistrale. Sapienza – Università di Roma

© 2016 Giuseppe Intini. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con  $\LaTeX$  e la classe Saphthesis.

Email dell'autore: [intinigiuseppe@gmail.com](mailto:intinigiuseppe@gmail.com)

## Sommario

Il progetto di collaborazione internazionale LIGO-Virgo ha come obiettivo la ricerca di segnali gravitazionali e la comprensione della struttura dell'Universo derivante dalla loro rivelazione. In quest'ambito si pone il problema di riuscire a trovare tali segnali e ricostruirne i parametri che caratterizzano le relative sorgenti. In particolare la ricerca *all-sky* di segnali continui, vale a dire la ricerca di quelle sorgenti di cui non si conosce a priori l'esistenza e che sono oggetto di interesse della presente tesi, richiede uno studio molto dettagliato. Dovendo, infatti, ricostruire un segnale senza aver alcuna informazione sulla sorgente che lo emette, questa procedura risulta piuttosto onerosa dal punto di vista computazionale, dato che è necessario esplorare tutto lo spazio quadridimensionale dei parametri che caratterizzano queste sorgenti (coordinate eclittiche  $\beta$  e  $\lambda$ , frequenza di rotazione e sue derivate temporali). Si devono inoltre identificare deboli segnali in dati estremamente rumorosi, cercando di ricostruire la posizione delle relative sorgenti in modo quanto più accurato possibile, in maniera da poter fare in un secondo tempo ricerche più mirate nella direzione stimata. Parte della *pipeline* che si occupa della ricerca di questo tipo di sorgenti, sviluppata ed utilizzata nel gruppo Virgo dell'università "La Sapienza" di Roma, è stata migliorata per quanto riguarda i tempi di calcolo relativi alla determinazione dei parametri delle sorgenti simulate e rivelate.

I dati di partenza sono stati quelli del secondo e del quarto *run* scientifico di VIRGO (VSR2 e VSR4), mentre il terzo (VSR3) è stato escluso per via della scarsa qualità dei dati e la poca sensibilità. VSR2 è cominciato il 7 Luglio 2009 ed è terminato l'8 Gennaio 2010, con un *duty factor* dell'80,4% per un totale di  $\sim 159$  giorni di *science mode data*. VSR4, invece, è cominciato il 3 Giugno 2011 ed è terminato il 5 Settembre dello stesso anno, con un *duty factor* dell'81% per un totale di 76 giorni di dati [2]. A questi dati sono stati aggiunti segnali continui artificiali (*Software Injections*) allo scopo di verificare l'abilità dell'algoritmo di ricerca (in seguito presentato) di identificarli e determinare la precisione nella stima dei parametri ad essa associati.

Lo studio si è quindi mosso nella direzione di riconoscere ed analizzare *pattern* di candidati prodotti da una certa sorgente simulata rispetto al rumore di fondo presente nei dati considerati. In questo senso si è sviluppato un nuovo algoritmo che punta a ridurre il grande numero di candidati (dell'ordine di  $10^8$ ), ricercando proprio all'interno dello spazio a quattro dimensioni sopra introdotto e analizzando quali siano quelli con alta statistica di rivelazione e che esibiscono *pattern* ben precisi. Infine, studiando le proprietà della stessa statistica di rivelazione si sono ricostruiti i parametri delle sorgenti.

Sebbene l'algoritmo possa godere di ulteriori miglioramenti, i risultati ottenuti sono abbastanza promettenti: l'algoritmo di scrematura dei candidati infatti è riuscito in 2 ore a rimuovere il 99,65% dei candidati di partenza senza perdere alcun candidato proveniente da una sorgente; questo ridurrebbe di molto i tempi di calcolo della *pipeline* del gruppo. Dall'altro lato l'algoritmo ha potuto rivelare con buona precisione 161 sorgenti in 2,5 ore (per un totale di 4,5 ore, includendo anche l'algoritmo di pulizia) contro le 240 rivelate utilizzando l'algoritmo precedente in più di 5 giorni.

In questa dissertazione verrà brevemente presentato il contesto in cui si inserisce questo lavoro; si descriverà quindi il tema delle onde gravitazionali e della loro rivelazione e si presenterà l'algoritmo di riconoscimento dei segnali usato dal gruppo Virgo di Roma, su cui questo lavoro si basa. Infine si descriverà dettagliatamente il nuovo

algoritmo sviluppato, esponendone i dettagli ed i miglioramenti che hanno portato a ridurre drasticamente i tempi di calcolo nonché i risultati ottenuti e i possibili sviluppi futuri.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1	Tipi di segnali gravitazionali . . . . .	10
1.1.1	Segnali continui . . . . .	14
1.2	Strumentazione . . . . .	14
1.2.1	Rivelazione interferometrica di segnali gravitazionali . . . . .	15
1.2.2	Cenni sulla Rivelazione Risonante . . . . .	19
1.2.3	Rete dei rivelatori interferometrici terrestri . . . . .	19
1.2.4	Virgo+ . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Procedure</b>	<b>29</b>
2.1	Tipi di analisi . . . . .	29
2.2	<i>Pipeline</i> del gruppo Virgo di Roma . . . . .	30
2.2.1	Rimozione dei <i>glitches</i> nel dominio del tempo . . . . .	31
2.2.2	Studio tempo-frequenza . . . . .	32
2.2.3	Trasformata di Hough . . . . .	35
2.3	<i>Clustering</i> e coincidenze . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Nuovi algoritmi per scremare grandi moli di candidati</b>	<b>39</b>
3.1	Dal segnale rivelato al <i>pattern</i> di candidati . . . . .	43
3.1.1	Identificazione dei <i>pattern</i> nel <i>set</i> di candidati ottenuti . . . . .	44
3.2	Pulizia dei candidati . . . . .	45
3.2.1	Dimensione delle celle da analizzare . . . . .	48
3.2.2	Margini di miglioramento dell'algoritmo . . . . .	49
3.3	<i>Clustering</i> dei candidati . . . . .	51
3.4	Analisi dei <i>Cluster</i> e stima dei parametri delle sorgenti recuperate . . . . .	51
3.5	Risultati . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Script</b>	<b>57</b>
A.1	Pulizia dei dati . . . . .	57
A.2	Creazione dei cluster . . . . .	62
A.3	Recupero dei parametri delle sorgenti . . . . .	65
<b>B</b>	<b>Tabelle Dati</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>107</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

In questo capitolo si tratteranno cenni dell'emissione di onde gravitazionali e della relativa rivelazione.

Le onde gravitazionali, teorizzate da Einstein nel 1916 [10], sono increspature dello spazio tempo che si propagano alla velocità della luce e sono fondamentalmente prodotte da accelerazioni di masse asimmetriche.

Nel tentativo di rendere compatibile la gravità con la teoria relativistica, Einstein parte dal principio di equivalenza<sup>1</sup> e giunge al concetto secondo cui la gravità non è una forza basata sull'azione a distanza, bensì è l'effetto della curvatura dello spazio-tempo dovuta alla presenza di una massa. Tale principio è formalizzato nelle equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}, \quad \chi = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.1)$$

dove  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$  è la contrazione del tensore di Riemann,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  è lo scalare di curvatura,  $g_{\mu\nu}$  è il tensore della metrica,  $T_{\mu\nu}$  è il tensore energia-impulso,  $G$  è la costante di gravitazione universale e  $c$  la velocità della luce. Queste equazioni non lineari contengono già al loro interno la propagazione del campo gravitazionale sotto forma di onda. Si pone però il problema dell'impossibilità di trovare una soluzione esatta a causa della forte non linearità. Si possono, tuttavia, trovare soluzioni in casi approssimati in cui la variazione del tensore metrico sia piccola rispetto al tensore stesso. L'esempio classico consiste nel considerare un spazio Minkowskiano<sup>2</sup> con piccole perturbazioni variabili nel tempo ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ). Si ottiene facilmente (vedi [19]) che tali piccole perturbazioni

<sup>1</sup>Il principio di Equivalenza Forte afferma che in un campo gravitazionale, per ogni punto dello spazio tempo, è sempre possibile trovare un Sistema di Riferimento Localmente Inerziale, ovvero un intorno sufficientemente piccolo in cui tutte le leggi della Fisica si comportano come in assenza di gravità, ovvero come predetto dalla Relatività Speciale (vedi ad esempio [10, 19]).

<sup>2</sup>Vale a dire uno spazio piatto, con metrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

rispettano le equazioni delle onde

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{h}_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \quad (1.3b)$$

dove  $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\lambda}_{\lambda}$ . Notare che la parte destra dell'equazione (1.3a) si annulla nel vuoto, ovvero dove supponiamo di studiare tale onda.

Dalla soluzione delle equazioni (1.3a) e (1.3b) si ottiene che, all'interno della sorgente,

$$\bar{h}^{\mu 0} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (1.4a)$$

$$\bar{h}^{ik}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \cdot \left[ \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{c^2} \int_V T_{00}(r - ct, x^n) x^i x^k d^3x \right] \quad i, k, n = 1, 2, 3. \quad (1.4b)$$

La grandezza da derivare due volte nell'equazione (1.4b) è l'integrale del primo termine del tensore energia impulso (vale a dire la densità di massa-energia) moltiplicato per le due coordinate  $x^i$  e  $x^k$ . Come è noto questo termine è il momento di quadrupolo[19].

Data la simmetria del sistema ( $h^{ij} = h^{ji}$ ) abbiamo 6 gradi di libertà, ma possiamo ancora imporre 4 condizioni di *gauge* (detta *Transverse-Traceless*) che riducono a 2 i gradi di libertà del problema. Il risultato sarà quello tipico di un'onda che si propaga come ci saremmo aspettati (ovvero proporzionale a  $\cos(\omega t - \kappa x)$ ). Considerando, allora, che questa onda si propaghi lungo l'asse  $\mathbf{x}$ , la perturbazione prende la forma:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+ & h_{\times} \\ 0 & 0 & h_{\times} & -h_+ \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega t - \kappa x), \quad (1.5)$$

con  $\omega$  e  $\kappa$  pulsazione e modulo del (tri-)vettore d'onda<sup>3</sup>. Dalla matrice in equazione (1.5) appare immediato il fatto che i due gradi di libertà corrispondono a due polarizzazioni dell'onda gravitazionale che modificano la distanza tra due punti in maniera differente. Ricordando che la quadri-distanza (ovvero la distanza invariante della Relatività Speciale) è definita da

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_{\mu} dx_{\nu}, \quad (1.6)$$

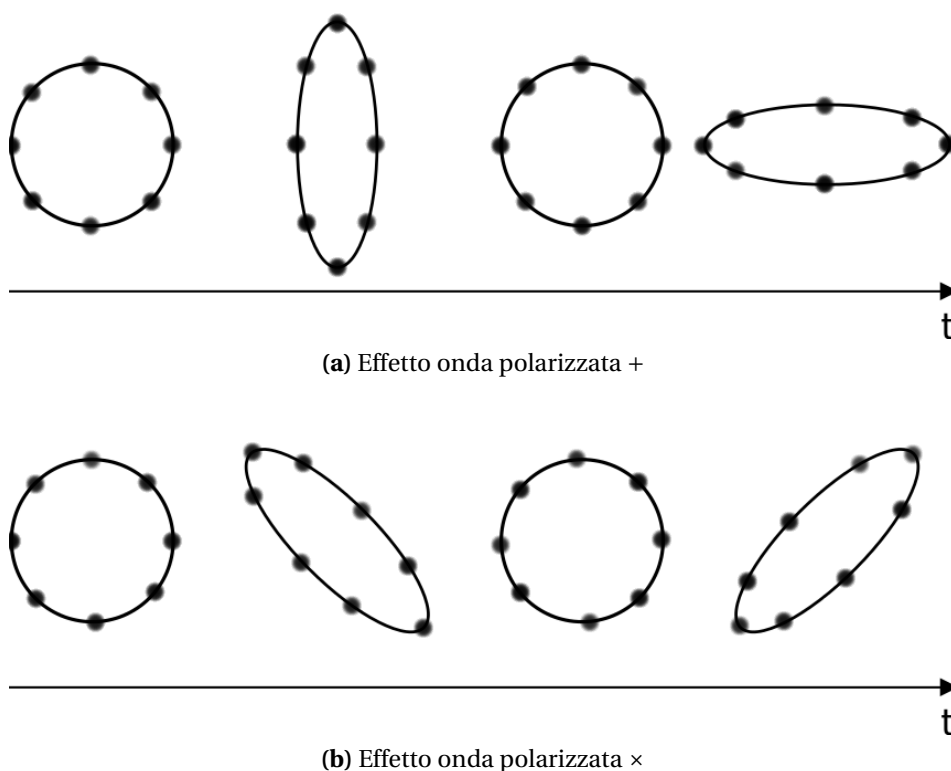
si può dedurre l'effetto dell'onda gravitazionale sulle distanze. Osserviamo quindi in figura 1.1 cosa succede ad un anello di punti soggetti ad un'onda gravitazionale polarizzata  $+$  o  $\times$ <sup>4</sup>. L'onda polarizzata  $+$  tenderà a modificare la coordinata di un fattore proporzionale a sé stessa, come si può vedere trovando la componente  $y$  e  $z$  del vettore posizione controvariante  $x^2 = g^{2\nu} x_{\nu} = (1 + h_+)x_2$  e  $x^3 = g^{3\nu} x_{\nu} = (1 - h_+)x_3$ . L'onda polarizzata  $\times$  tenderà, invece, a modificare la coordinata di un fattore proporzionale alla coordinata ortogonale:  $x^2 = g^{2\nu} x_{\nu} = x_2 + h_{\times} x_3$  e  $x^3 = g^{3\nu} x_{\nu} = x_3 + h_{\times} x_2$ .

Quanto detto finora spiega perché le onde gravitazionali siano molto più difficili da rivelare rispetto alle onde elettromagnetiche:

<sup>3</sup>Si ricava inoltre dall'equazione (1.3b) che, dato  $\kappa_{\mu} = (\omega, \vec{\kappa})$ ,  $k_{\mu}k^{\mu} = 0$ .

<sup>4</sup>Notare che l'onda gravitazionale non ha effetto sul singolo punto se non in relazione ad un altro punto. La metrica modifica le distanze, ma non ha un effetto diretto sulle coordinate.





**Figura 1.1.** Effetto delle onde gravitazionali su un anello di particelle.

- come è noto, almeno su scala macroscopica, il campo gravitazionale è intrinsecamente più debole;
- in secondo luogo lo sviluppo in multipoli ci mostra che il potenziale di quadrupolo scala con una potenza in meno della distanza da una certa sorgente ( $\sim r^{-3}$ ) rispetto al momento necessario per la generazione di onde elettromagnetiche ( $\sim r^{-2}$ ).

La prima prova indiretta dell'esistenza delle onde gravitazionali è stata attestata nel 1981 [18], dopo che nel 1974 Hulse e Taylor scoprirono la prima radio-pulsar<sup>5</sup> in un sistema binario di stelle di neutroni (PSR B1913+16 [11]). Essi notarono una diminuzione del periodo orbitale di tale pulsar attorno alla propria compagna in perfetto accordo con quanto predetto della teoria della Relatività Generale di Einstein. Negli anni successivi, quanto trovato da Hulse e Taylor è stato confermato da ulteriori studi, condotti sia sullo stesso sistema che su altri analoghi. Merita menzione l'unico sistema oggi noto composto da due pulsar, PSR J0737-3039[12].

La prova diretta dell'esistenza delle onde gravitazionali si è avuta il 14 Settembre 2015, quando sono state rivelate per la prima volta onde gravitazionali provenienti dalla coalescenza di due buchi neri[3].

<sup>5</sup>Una pulsar è una stella di neutroni che emette radiazione elettromagnetica in coni ristretti che si osservano come impulsi emessi ad intervalli estremamente regolari. La radiazione emessa è dovuta alla rapida rotazione lungo un asse non parallelo al suo elevato momento magnetico.

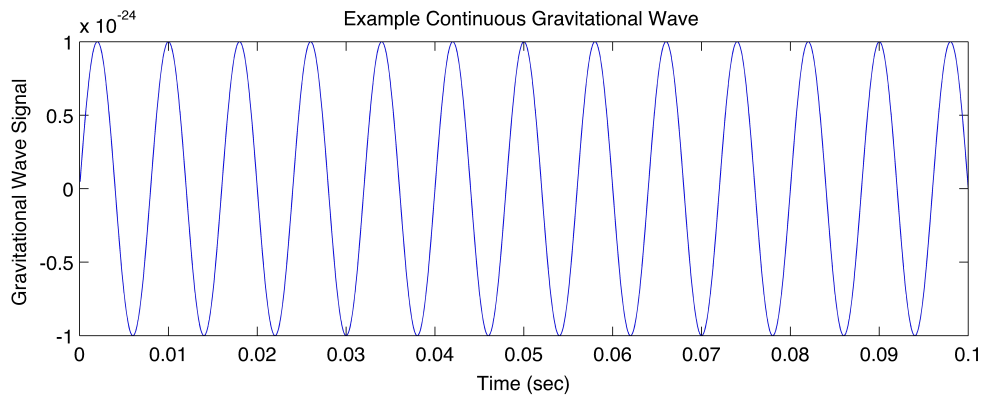


Figura 1.2. Forma d'onda emessa da sorgenti continue.

## 1.1 Tipi di segnali gravitazionali

La teoria della Relatività Generale è stata sviluppata nel tempo cercando di prevedere quali segnali gravitazionali potessero plausibilmente essere presenti nell'Universo. Ad oggi è possibile individuare 4 classi di sorgenti di onde gravitazionali, due di tipo continuo e due di tipo transiente [17]:

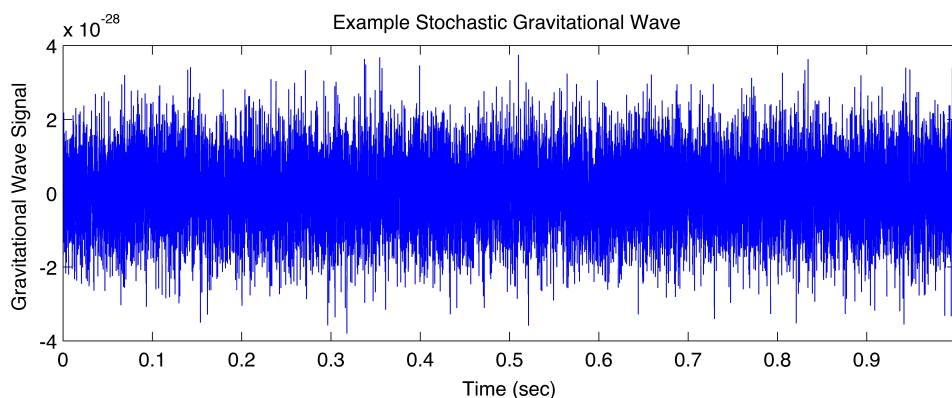
- Onde gravitazionali continue da stelle di neutroni rotanti
- Fondo Stocastico di onde gravitazionali
- *Burst*
- Coalescenza di sistemi binari compatti.

**Onde gravitazionali continue da stelle di neutroni rotanti** Le onde gravitazionali di tipo continuo (CW dal termine inglese *Continuous Wave*) sono onde quasi monocromatiche (ovvero con forme d'onda del tipo in figura 1.2). Questo tipo di onde è prodotto da stelle di neutroni rapidamente rotanti caratterizzate da una simmetria non assiale<sup>6</sup>. Questa asimmetria può essere, per esempio, dovuta a stress magnetici interni. Com'è stato detto nella sezione precedente, essendo fenomeni di debole intensità, si ricercano solo sorgenti presenti nella nostra galassia. Oggetti di questo tipo sono, ad esempio, Crab e Vela. Le frequenze di questi segnali sono legate a quelle di rotazione della stella ed al tipo di rottura di simmetria che le caratterizza.

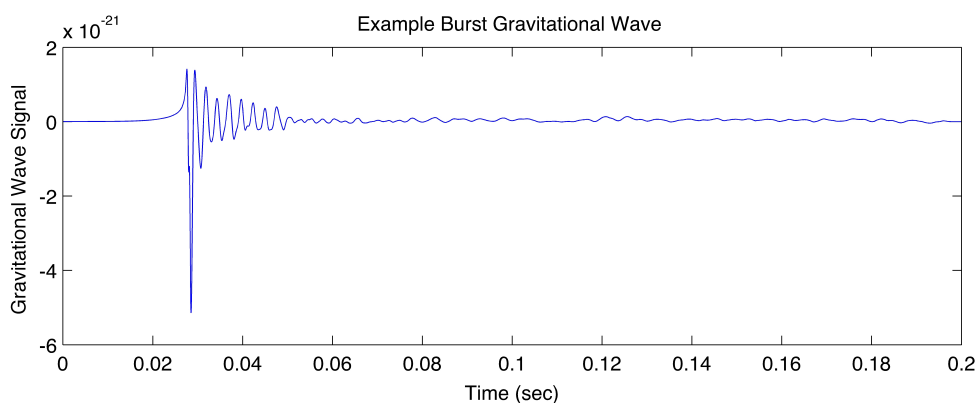
Pur essendo prodotte da sorgenti di scarsa intensità, la continuità che le caratterizza le rende ottimi candidati per studiare l'evoluzione delle sorgenti.

È inoltre da evidenziare che, a differenza dei fenomeni impulsivi, questi invece possono essere studiati retroattivamente, andando a cercare nei dati già ottenuti la presenza o meno del segnale e garantendo quindi un'ulteriore conferma della validità del risultato.

<sup>6</sup>Si noti che oggetti rotanti a simmetria assiale non producono onde gravitazionali in quanto caratterizzate da variazione temporale nulla del momento di quadrupolo.



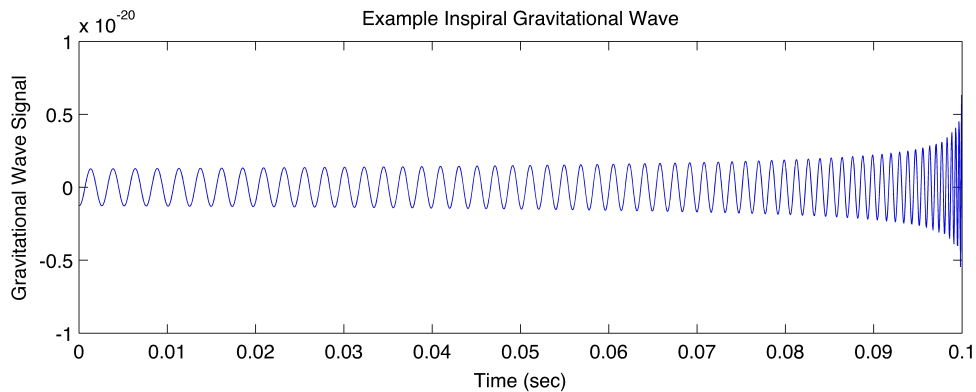
**Figura 1.3.** Esempio di forma d'onda che potrebbe avere il rumore stocastico di fondo.



**Figura 1.4.** Esempio di forma d'onda di un segnale di tipo *burst*.

**Fondo stocastico di onde gravitazionali** Questo tipo di rumore stocastico di fondo ha una duplice natura: cosmologica ed astrofisica. Tale segnale è infatti composto sia da una radiazione residua prodotta nei primissimi istanti di vita dell'Universo, sia da una sovrapposizione delle emissioni gravitazionali di migliaia di sorgenti troppo lontane per essere distinte singolarmente. Questo è un fenomeno continuo e non transiente; a differenza del precedente però, il fondo stocastico di onde gravitazionali è molto difficile da rivelare, ma riuscire ad identificarlo potrebbe permetterci di conoscere più approfonditamente i primissimi istanti dell'Universo dopo il Big Bang. In figura 1.3 si nota un esempio di come potrebbe presentarsi il rumore stocastico di fondo se venisse rivelato.

**Burst** Si tratta di fenomeni di brevissima durata (anche inferiore al millisecondo) prodotti da esplosioni di supernovae o da *Gamma Ray Burst*. Essendo fenomeni transienti estremamente energetici, si presuppone siano caratterizzati da una forte emissione gravitazionale. In figura 1.4 è possibile osservare una forma d'onda attesa per un segnale di questo tipo. Come è possibile notare, ci si attende che il fenomeno sia molto più energetico di un fenomeno che produce segnali continui anche se, appunto, di durata estremamente limitata.



**Figura 1.5.** Forma d'onda prevista dalla coalescenza di un sistema binario di due oggetti compatti.

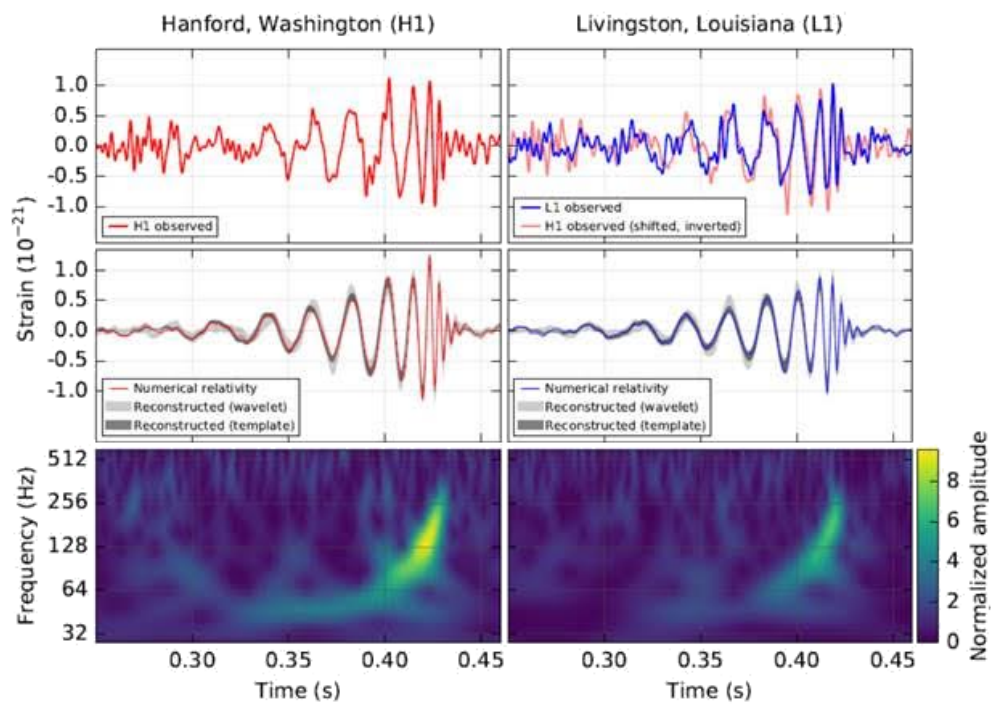
**Coalescenza di sistemi binari compatti** Una delle principali sorgenti di onde gravitazionali sono i sistemi binari di oggetti compatti formati da stelle di neutroni e/o buchi neri. È possibile distinguere tre fasi nel processo fisico di coalescenza che genera il segnale: lo spiraleggiamento, il *merger* ed il *ringdown*.

Durante lo spiraleggiamento i due oggetti compatti emettono onde gravitazionali quasi continue a frequenze multiple del loro periodo<sup>7</sup> e non possono quindi essere rivelate dai rivelatori interferometrici terrestri come Virgo e LIGO (che sono sensibili a frequenze al di sopra dei 10 Hz mentre l'orbita di due oggetti lontani dalla coalescenza è, solitamente, un fenomeno caratterizzato da frequenze inferiori ad 1 Hz), ma dovrebbero essere rivelabili da antenne spaziali (che si concentrano su frequenze molto minori di 1 Hz; si veda, ad esempio, il progetto eLISA [9]).

La seconda e la terza fase sono gli effetti che hanno luogo quando un sistema binario è vicino al collasso: il segnale gravitazionale continuo diventa transiente attraversando una rapida fase di *merger* in cui i due corpi si avvicinano. Il segnale atteso da questa fase ha una forma d'onda di tipo *chirp* che raggiunge alte frequenze (vedi figura 1.5). Questa fase si conclude quando i due corpi si stabilizzano formando un nuovo oggetto (*ringdown*). Il segnale rivelato il 14 Settembre 2015 [3] è stato emesso da un sistema di due buchi neri e ci ha permesso di osservare non solo per la prima volta le onde gravitazionali in maniera diretta, ma anche l'esistenza di buchi neri di massa intermedia<sup>8</sup> e la loro coalescenza. In figura 1.6 vediamo il segnale effettivamente rivelato dai due rivelatori LIGO. Si può distinguere facilmente la fase di *merger* tra i ~ 0.32 ed i ~ 0.43 secondi, mentre un po' meno evidente è *ringdown* finale tra ~ 0.43 secondi e la fine. I corpi in coalescenza erano una coppia di buchi neri binari di masse  $36M_{\odot}$  e  $29M_{\odot}$  che, collassando in un buco nero di  $62M_{\odot}$ , hanno emesso  $3M_{\odot}$  in onde gravitazionali (che, data la teoria moderna, sono l'unica forma di energia che un buco nero può perdere).

<sup>7</sup>Un'unica frequenza pari al doppio di quella di rivoluzione in caso di orbite circolari, mentre una forma più complicata caratterizzata dalla sovrapposizione dei multipli della frequenza di rivoluzione in caso di orbite ellittiche.

<sup>8</sup>Prima della scoperta eravamo a conoscenza dell'esistenza di buchi neri piccoli (fino a  $10M_{\odot}$ ), che si osservano in fase di nascita o di buchi neri supermassivi (di masse  $\gtrsim 10^6M_{\odot}$ ), di cui si osservano gli effetti gravitazionali.



**Figura 1.6.** In figura il segnale effettivamente rivelato dai due rivelatori LIGO Hanford (a sinistra, in rosso) e Livingston (a destra, in blu): nella parte superiore del grafico vediamo il segnale effettivamente rivelato dall'interferometro in funzione del tempo; il grafico centrale presenta la curva ottenuta dalla simulazione numerica paragonata con quella ricostruita in base al segnale letto; infine si può notare l'andamento della frequenza nel tempo.

### 1.1.1 Segnali continui

Poiché, come verrà descritto in sezione 2.1, lo studio specifico si è focalizzato sull'individuazione di segnali emessi da stelle di neutroni rotanti e dotate di una certa asimmetria<sup>9</sup>, mostriamo brevemente qual è la forma d'onda emessa da tale tipo di sorgente. Partiamo dalla forma generica di un segnale gravitazionale espresso nella base delle sue polarizzazioni:

$$h^{\mu\nu}(t) = h_+(t)e_+^{\mu\nu}(t) + h_\times(t)e_\times^{\mu\nu}(t), \quad (1.7)$$

dove  $h_+$  e  $h_\times$  sono le forme d'onda nelle due polarizzazioni  $+$  e  $\times$ , mentre  $e_{+, \times}^{\mu\nu}$  rappresentano la base del tensore polarizzazione rispettivo. Si nota che le forme d'onda del segnale sono del tipo

$$h_+(t) = h_0 \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(\Phi(t)) \quad h_\times(t) = h_0 \cos \iota \sin(\Phi(t)), \quad (1.8)$$

dove  $t$  è il tempo nel sistema di riferimento del rivelatore,  $\iota$  è l'angolo di inclinazione dell'asse di rotazione della stella rispetto alla linea di vista;  $\Phi(t)$  è la fase del segnale e  $h_0$  è l'ampiezza del segnale gravitazionale espressa da

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} \epsilon f^2}{d}; \quad (1.9)$$

$G$  è la costante gravitazionale e  $c$  la velocità della luce;  $I_{zz}$  è il momento d'inerzia principale della stella (supponendo che sia allineato con l'asse di rotazione), mentre

$$\epsilon = \frac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} \quad (1.10)$$

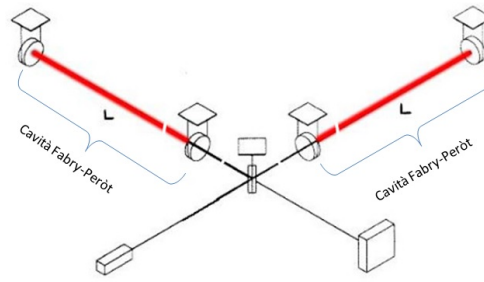
è la sua ellitticità equatoriale (essendo  $I_{yy}$  e  $I_{xx}$  gli altri due assi di inerzia) e  $f$  la frequenza del segnale (che si verifica essere pari a 2 volte la frequenza di rotazione della stella, escludendo cioè deformazioni più complesse) [8, 13, 19].

## 1.2 Strumentazione

Come detto all'inizio del capitolo 1, l'effetto di un'onda gravitazionale che attraversa lo spazio è quello di modificare le distanze, secondo quanto mostrato in figura 1.1. Per misurare questa variazione non possiamo però usare uno strumento che sia esso stesso soggetto alla medesima deformazione, come ad esempio uno standard metro campione. Pertanto si ricorre all'interferometria laser e ad uno dei postulati della Relatività Ristretta, ossia l'invarianza della velocità della luce. Un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali sfrutta le proprietà di interferenza della luce per osservare la differenza di lunghezza dei bracci indotta dal passaggio dell'onda.

Un interferometro di Michelson a bracci ortogonali è uno strumento che fa uso dell'interferometria per misurare le distanze attraverso le differenze di cammino ottico

<sup>9</sup>Altri tipi di emissioni gravitazionali per una stella di neutroni sono: la precessione libera della stella che emette con una frequenza pari a quella di rotazione; i cosiddetti *r-modes*, modi toroidali che agiscono sulla superficie della stella, causando un'emissione attesa  $\sim 3/4 f_{\text{rotazione}}$  [1].



**Figura 1.7.** Schema di un interferometro tipo LIGO-Virgo.

di due fasci di fotoni. Tale strumento è costituito da un laser che, puntato su un *beam splitter*, divide il suo fascio in due parti; ciascuno di questi fasci, attraversando un braccio di lunghezza  $L$ , impatta contro uno specchio posto alla fine del braccio stesso e torna al *beam splitter*. I due fasci si ricombinano sul *beam splitter* e interferiscono, permettendo così di misurare le distanze di cammino ottico percorse. Come si è accennato all'inizio del capitolo, si mostrerà in sezione 1.2.1 che la differenza di cammino ottico ( $2\Delta L$ ) indotta da un'onda gravitazionale è proporzionale al cammino ottico stesso ( $2L$ ) e all'ampiezza  $h$  dell'onda gravitazionale, ossia  $\Delta L \propto Lh$ .

L'aggiunta di cavità Fabry-Peròt lungo i bracci permette di aumentare il cammino ottico (lungo ciascun braccio), amplificando così la variazione  $\Delta L$  dovuta al passaggio dell'onda gravitazionale.

In figura 1.7 possiamo vedere un esempio di interferometro di Michelson a braccia ortogonali con cavità Fabry-Peròt, sistema analogo agli interferometri Virgo e LIGO.

### 1.2.1 Rivelazione interferometrica di segnali gravitazionali

Esaminiamo come l'onda gravitazionale generica (nella TT *gauge*) modifichi i percorsi dei fasci nell'interferometro e, di conseguenza, come sia possibile la rivelazione di un segnale gravitazionale. Grazie ad un sistema di sospensioni mediante il quale gli specchi sono isolati dalle vibrazioni terrestri [15], possiamo considerare gli specchi come se fossero posti in un sistema di riferimento localmente inerziale e quindi studiare come (in TT *gauge*) vengono modificate le distanze in seguito al passaggio di un'onda gravitazionale.

Consideriamo un'onda che si propaghi lungo l'asse  $z$  e polarizzata  $+$  (per semplicità di conto). Nel piano  $z = \text{cost.}$  l'onda gravitazionale ha ampiezza

$$h_+(t) = h_0 \cos(\omega_{\text{GW}} t), \quad (1.11)$$

con  $\omega_{\text{GW}}$  frequenza dell'onda stessa. Tale onda modifica la distanza propria di Minkowsky in modo che

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+(t)) dx^2 + (1 - h_+(t)) dy^2 + dz^2. \quad (1.12)$$

I fotoni, essendo particelle di tipo luce, si muovono lungo le geodetiche di norma nulla (ossia  $ds^2 = 0$ ), quindi per fotoni che viaggiano nel braccio dell'interferometro parallelo

all'asse  $x$  varrà

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+(t)) dx^2 = 0 \quad (1.13)$$

$$dx = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + h_+(t)}} c dt \simeq \pm \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) c dt, \quad (1.14)$$

dove il segno dipende dal percorso che sta facendo il fascio di luce (diciamo "+" per il tratto dal *beam splitter* allo specchio e "-" per il ritorno). Consideriamo allora un fotone che parte dal *beam splitter* al tempo iniziale  $t_0$ , attraversa il braccio di lunghezza  $L_x$ , colpisce lo specchio al tempo  $t_1$  e torna al *beam splitter* al tempo  $t_2$ . Il percorso del fotone sarà

$$2L_x = \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) c dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{1}{2} h_+(t)\right) c dt = c(t_2 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_2} h_+(t) dt. \quad (1.15)$$

Inserendo la definizione di  $h_+$  dell'equazione (1.11) si può ottenere facilmente che

$$\begin{aligned} 2L_x &= c(t_2 - t_0) - \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_2} h_0 \cos(\omega_{\text{GW}} t) dt = \\ &= c(t_2 - t_0) - \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} (\sin(\omega_{\text{GW}} t_2) - \sin(\omega_{\text{GW}} t_0)). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Dato che studiamo un'approssimazione al prim'ordine in  $h_0$ , possiamo invertire l'equazione (1.16) per poter sostituire  $t_2 = t_0 + \frac{2L}{c} + O(h_0)$  all'interno della funzione seno (che poiché moltiplica  $h_0$  è già di ordine 1). Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} \sin(\omega_{\text{GW}} t_2) &= \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} \sin\left(\omega_{\text{GW}} \frac{2L}{c}\right) + O(h_0^2) \\ &\sim \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} \sin\left(\omega_{\text{GW}} \frac{2L}{c}\right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sostituendolo quindi nella stessa equazione (1.16) otteniamo:

$$\begin{aligned} 2L_x &= c(t_2 - t_0) - \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} (\sin(\omega_{\text{GW}}(t_0 + \frac{L_x}{c})) - \sin(\omega_{\text{GW}} t_0)) = \\ &= c(t_2 - t_0) - \frac{c h_0}{2\omega_{\text{GW}}} 2 \sin\left(\omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c}\right) \cos\left(\omega_{\text{GW}} \left(t_0 + \frac{L_x}{2c}\right)\right) = \\ &= c(t_2 - t_0) - h_0 L_x \frac{\sin\left(\omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c}\right)}{\omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c}} \cos\left(\omega_{\text{GW}} \left(t_0 + \frac{L_x}{2c}\right)\right) = \\ &= c(t_2 - t_0) - h_0 L_x \cos\left(\omega_{\text{GW}} \left(t_0 + \frac{L_x}{2c}\right)\right) \text{sinc}\left(\omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c}\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Notiamo ora che il tempo iniziale è contenuto solo nel coseno e quindi rappresenta una sorta di fase del segnale e permette di riscrivere il tutto come

$$2L_x = c(t_2 - t_0) - h_+ \left(t_0 + \frac{L_x}{2c}\right) L_x \text{sinc}\left(\omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c}\right). \quad (1.19)$$



Considerando che il percorso in assenza di onde gravitazionali è  $2L_x = c(t_2 - t_0)$ , lo sfasamento del segnale in un singolo braccio indotto dal passaggio dell'onda è quindi

$$\Delta\phi_x = \frac{\omega_L}{c} \cdot \Delta L_x = \frac{L_x \omega_L h_+ \left( t_0 + \frac{L_x}{2c} \right)}{c} \text{sinc} \left( \omega_{\text{GW}} \frac{L_x}{c} \right). \quad (1.20)$$

In maniera del tutto analoga (osservando che, come accennato, l'onda gravitazionale agisce in maniera opposta sulle direzioni ortogonali), si nota che lo sfasamento sull'altro braccio è uguale ed opposto a quello mostrato sul primo, raddoppiando così la differenza dei cammini ottici e quindi lo sfasamento totale sul segnale rivelato.

### Cavità Fabry-Però

Come accennato all'inizio di questa sezione e mostrato in figura 1.7, i rivelatori interferometrici Virgo e LIGO migliorano la rivelazione attraverso cavità Fabry-Però, che consentono di aumentare la lunghezza effettiva dei bracci. Infatti, se la lunghezza di un braccio è uguale alla lunghezza d'onda del laser (o ad un suo multiplo) l'interferenza di tipo Fabry-Però è costruttiva ed i segnali si sommano in intensità. Così, detta  $R$  la riflettività di uno specchio che costituisca la cavità Fabry-Però e considerando 1 la riflettività dello specchio all'estremità del braccio, la probabilità che un fotone esca dalla cavità verso il rivelatore dopo  $n$  riflessioni all'interno del braccio è

$$p(n) = \frac{R^{n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} R^{n-1}} = R^{n-1} (1 - R). \quad (1.21)$$

Risulta quindi utile valutare il numero medio di salti effettuati da un fotone

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n p(n) = \dots = \frac{1}{1 - R}, \quad (1.22)$$

che porta a valutare uno *storage time* della cavità  $\tau_s = \frac{2L}{c} \langle n \rangle$ . Questa grandezza indica quanto tempo in media un fotone rimane all'interno della cavità, permettendoci di valutare il cammino ottico effettivo:  $\langle L \rangle = c\tau_s$ . Queste grandezze possono essere riscritte in funzione della *finesse* di una cavità Fabry-Pérot, definita come il rapporto tra il *free spectral range*<sup>10</sup> ( $\delta\omega_L$ ) e l'ampiezza a mezza altezza delle curve di interferenza  $\Delta\omega_L$ <sup>11</sup>:

$$\mathcal{F} = \frac{\delta\omega_L}{\Delta\omega_L} = \frac{\pi \sqrt[4]{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}, \quad (1.23)$$

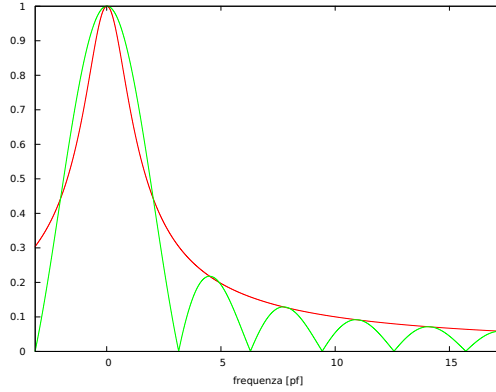
con  $R_1$  ed  $R_2$  riflettività dei due specchi. Da qui si vede che lo *storage time* può essere scritto, nelle approssimazioni di specchio terminale del Michelson perfettamente riflettente e

<sup>10</sup>Il *free spectral range* rappresenta la differenza di lunghezza d'onda tra due picchi di trasmissione dell'interferometro.

<sup>11</sup> Il modulo quadro del segnale trasmesso da un interferometro Fabry-Però è

$$|E_t|^2 = E_0^2 \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + (r_1 r_2 \cos(2k_L L))},$$

con  $r_i^2 = R_i$  e  $t_i^2 = T_i$  (con  $i = 1, 2$  rispettivamente riflettività e trasmittività dell' $i$ -esimo specchio),  $k_L$  vettore d'onda del laser,  $E_0$  intensità iniziale del segnale e  $E_t$  intensità del segnale trasmesso.



**Figura 1.8.** Differenza tra la risposta di interferometro di Michelson normale (in verde) e con cavità Fabry-Perot (in rosso). La frequenza è in unità di  $f_p$ .

specchio di uscita del Fabry-Perot con  $R \simeq 1$ ,

$$\tau_s \simeq \frac{L \mathcal{F}}{c \pi}. \quad (1.24)$$

L'effetto del passaggio dell'onda gravitazionale in una cavità Fabry-Perot merita ulteriore attenzione. Se infatti in assenza di onda gravitazionale l'interferenza allo specchio di uscita della cavità è solo costruttiva, l'onda gravitazionale crea uno sfasamento relativo tra i fasci all'uscita della cavità che dipende da quanti salti un determinato fotone ha compiuto. Si vede facilmente che ogni salto crea uno sfasamento di

$$\Delta\phi \simeq \frac{4\mathcal{F}}{\pi} k_L \Delta L = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} k_L L h_0 \cos(\omega_{\text{GW}} t) = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} k_L L h_+, \quad (1.25)$$

con  $k_L$  vettore d'onda del fascio. Tralasciando semplici calcoli, si ottiene che, definita la *pole frequency*  $f_p \equiv \frac{1}{4\pi\tau_s}$ , lo sfasamento in valore assoluto in un interferometro Fabry-Perot è

$$\begin{aligned} |\Delta\phi_{\text{FP}}| &\simeq h_0 \frac{4\mathcal{F}}{\pi} k_L L \frac{1}{\sqrt{1 + (f_{\text{GW}}/f_p)^2}} = \\ &= h_0 T_{\text{FP}}(f_{\text{GW}}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove  $f_{\text{GW}}$  è la frequenza dell'onda gravitazionale e  $T_{\text{FP}}(f_{\text{GW}})$  la funzione di trasferimento del segnale. In figura 1.8 si può vedere la differenza tra l'interferometro di Michelson normale e quello con cavità Fabry-Pérot.

I risultati che sono stati presentati finora sono fatti per un caso particolare: onda che si propaghi lungo l'asse  $z$  con polarizzazione  $+$ . Il caso generico si ottiene attraverso calcoli analoghi: per una trattazione più completa si veda M. Maggiore: *Gravitational Waves: Theory and Experiments*, Capitolo 9.

In generale si mostra che nelle equazioni (1.20) e (1.25) per avere i risultati in caso di polarizzazione e direzione di propagazione generici è sufficiente sostituire il termine  $h_+$  con il termine

$$\frac{1}{2} h_{xx} - h_{yy} = \frac{1}{2} h_+ (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi + h_\times \cos \theta \sin 2\phi, \quad (1.27)$$

dove  $(90 - \theta)$  e  $\phi$  sono gli angoli corrispondenti rispettivamente a latitudine e longitudine in coordinate polari.

Come si può notare dall'equazione (1.27), l'interferometro ha degli angoli ciechi per le due polarizzazioni, angoli cioè dove la differenza di lunghezza sui due bracci indotta dal passaggio dell'onda è la stessa e quindi l'effetto dell'onda è nullo. Questo è evidente annullando i contributi dell'equazione (1.27) per le singole polarizzazioni.

### 1.2.2 Cenni sulla Rivelazione Risonante

Sebbene i sistemi di rivelazione moderna si siano mostrati efficaci nella ricerca di onde gravitazionali, è interessante ricordare il primo esperimento condotto da Weber utilizzando uno strumento completamente diverso da quello di cui si è finora parlato: il rivelatore risonante.

La rivelazione risonante si proponeva di rivelare le onde gravitazionali misurando la messa in moto delle particelle al passaggio dell'onda. In tal senso, essendo la forza indotta dall'onda periodica come l'onda stessa, si è pensato che potesse essere efficace utilizzare un oggetto con frequenza di risonanza pari a quella dell'onda. L'onda gravitazionale, incidendo sul rivelatore risonante, avrebbe dovuto mettere in moto l'antenna e dei rivelatori piezoelettrici avrebbero dovuto misurarne il passaggio. Tale strumento portò il fisico Joseph Weber ad affermare di aver rivelato per la prima volta onde gravitazionali nel 1969 [20]. Questi risultati sono stati considerati molto controversi ed il fatto che molti rivelatori di questo genere siano stati costruiti, ma nessuno abbia rivelato altri risultati consistenti con quelli di Weber, ha fatto sì che tale rivelazione fosse considerata sbagliata. Il problema di tale strumento era la scarsa sensibilità, nonostante le barre risonanti fossero molto massive per incrementarne la risposta e i rivelatori piezoelettrici molto sensibili. La debolezza del segnale gravitazionale non consentiva tuttavia di osservare segnali forti che provenissero dal di fuori della nostra galassia. Un'ulteriore problematica di tali rivelatori era dovuta al fatto che la frequenza dell'onda gravitazionale doveva essere esattamente pari alla risonanza dello strumento perché vi fosse rivelazione [14].

Il passaggio storico dai rivelatori risonanti a quelli interferometrici ha segnato il passaggio dagli esperimenti di piccola scala (una dozzina di ricercatori) a quelli di collaborazione internazionale che abbiamo oggi (più di 1000 ricercatori).

### 1.2.3 Rete dei rivelatori interferometrici terrestri

Sulla base di un accordo internazionale si è deciso di installare una rete di rivelatori che permettesse non solo di rivelare segnali gravitazionali, ma anche di conoscere con buona precisione la loro provenienza. Tale rete (oggi in fase di sviluppo) è costituita da rivelatori cosiddetti di seconda generazione:

**Virgo** nella sua versione *Advanced*. Si tratta di un rivelatore interferometrico con lunghezza dei bracci pari a 3 km, situato a Cascina (Pisa). È oggi in fase di aggiornamento.

**LIGO** è la coppia di interferometri americani: i due apparati sono situati a Hanford (Washington) ed a Livingston (Luisiana) e sono già attivi nella loro versione *Advanced*. I due interferometri hanno bracci di 4 km.

**GEO600** situato a sud di Hannover, in Germania, è un piccolo interferometro con bracci di 600 m e viene essenzialmente usato come laboratorio per lo studio delle compo-

menti che poi saranno usate sui rivelatori più grandi. Rimane oggi un interferometro di prima generazione.

**Kagra** è un interferometro in costruzione in Giappone. Il progetto prevede bracci di 3 km.

**Ligo-India** (o INDIGO) è un progetto mirato alla costruzione di un interferometro in India. Questo è motivato dalla necessità di avere un interferometro nell'emisfero australe per migliorare la precisione nella stima della direzione di provenienza di un segnale gravitazionale.

Oltre a questi interferometri è interessante accennare a due progetti futuri: da un lato gli interferometri spaziali che, essendo privi di rumore sismico, saranno in grado di rivelare segnali a frequenze molto più basse (nonostante altri tipi di rumori caratteristici impediscano di rivelare quelli a frequenze più alte). Il progetto eLISA dovrebbe prevedere un interferometro triangolare (quindi non più a bracci ortogonali) in grado di osservare le frequenze fino ad 1 Hz [9]. Un altro progetto su cui si sta lavorando sono gli interferometri di terza generazione, sotterranei, con bracci pari o superiori a 10 km e specchi a temperature vicine ai 20 K [16].

#### 1.2.4 Virgo+

Essendo stato svolto il lavoro sui dati sperimentali di Virgo+, specificatamente sui *run* scientifici 2 e 4, presentiamo una breve descrizione di tale apparato. Il paragrafo si concluderà con la descrizione delle migliorie apportate nel frattempo a Virgo+, trasformato nell'apparato *Advanced*, che dovrebbe effettuare la prima presa dati nel secondo semestre di quest'anno.

D'ora in avanti si indicherà per semplicità di notazione "Virgo" intendendo però la versione + dell'interferometro.

#### Tipi di dissipazione in Virgo

Presentiamo i vari tipi di rumore che influenzano le prese dati di Virgo [15].

**Rumore sismico** L'insieme delle oscillazioni del terreno viene classificato come rumore sismico, che è rilevante alle basse frequenze. Tale tipo di rumore impedisce di rivelare l'emissione di onde gravitazionali di sistemi binari di corpi compatti coalescenti in fase a spirale (vedere 1.1). Questo limite può essere superato solo da interferometri spaziali come quello del progetto eLISA [9].

**Shot noise** Si tratta delle fluttuazioni in lettura del laser ed è possibile mostrare che tale rumore si riduce all'aumentare della potenza del laser e che il rapporto segnale/rumore è massimo quando in uscita si osserva la frangia scura.

**Pressione di radiazione** La luce emessa dal laser esercita una pressione di radiazione sugli specchi dell'interferometro, causandone uno spostamento. Tale effetto aumenta all'aumentare della potenza del laser, e deve quindi essere minimizzato insieme allo *shot noise*.

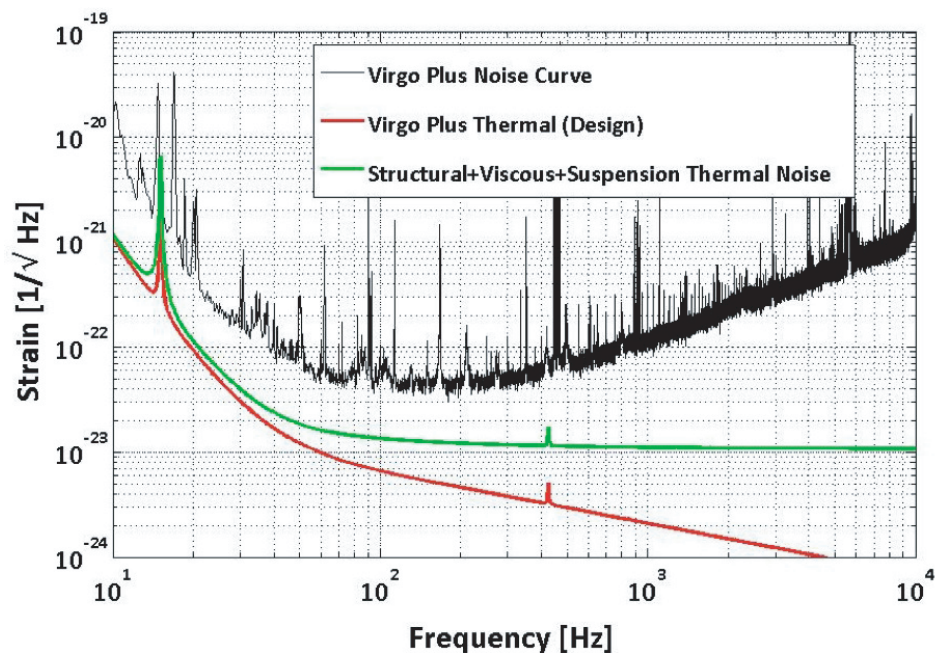


Figura 1.9. Curva di sensibilità di Virgo.

**Rumore termico** Si tratta delle fluttuazioni indotte dal moto microscopico delle particelle di specchi e sospensioni ed è quindi strettamente legato alla temperatura e alla geometria del sistema. In prossimità delle frequenze di risonanza dei modi normali delle varie componenti si hanno alcuni tra i picchi più elevati.

In figura 1.9 osserviamo la sensibilità di Virgo. È evidente che per fare uno studio del segnale alcune frequenze caratterizzate da alti picchi di rumore vadano escluse dai dati perché troppo disturbate.

### Cenni sull'apparato sperimentale

Virgo è un rivelatore interferometrico la cui struttura, mostrata in figura 1.10, è quella di un Michelson con bracci ortogonali con un cammino ottico di 267 km indotto da bracci lunghi 3 km ciascuno con cavità Fabry-Peròt di *finesse* 140<sup>12</sup>. Ciascuna cavità è costituita da uno specchio detto *input* più vicino alla sorgente laser e uno specchio detto *end* posto all'estremità di ciascun braccio dell'interferometro. Una caratteristica peculiare dei due specchi *end* è quella di essere concavi con raggio di curvatura  $R_c = 3450$  m: in questo modo è possibile collimare ulteriormente il fascio laser che altrimenti, poiché non perfettamente coerente, avrebbe uno *spot* via via crescente a ogni riflessione all'interno della cavità.

Virgo è inoltre munito di un sistema di *power recycling* in ingresso al *beam splitter*. Tale sistema consente di far rientrare la luce riflessa all'ingresso del Michelson attraverso uno specchio aggiuntivo, senza il quale, tornando verso il laser, provocherebbe dei disturbi nel funzionamento del laser stesso. Con questa tecnica è possibile aumentare l'intensità del fascio laser riducendo, tra l'altro, lo *shot noise*. Infine è presente un apparato *mode cleaner*

<sup>12</sup>Il cammino ottico si ricava facendo  $L_{\text{eff}} = L * \langle n \rangle$ , con  $\langle n \rangle$  dato dall'equazione (1.22).

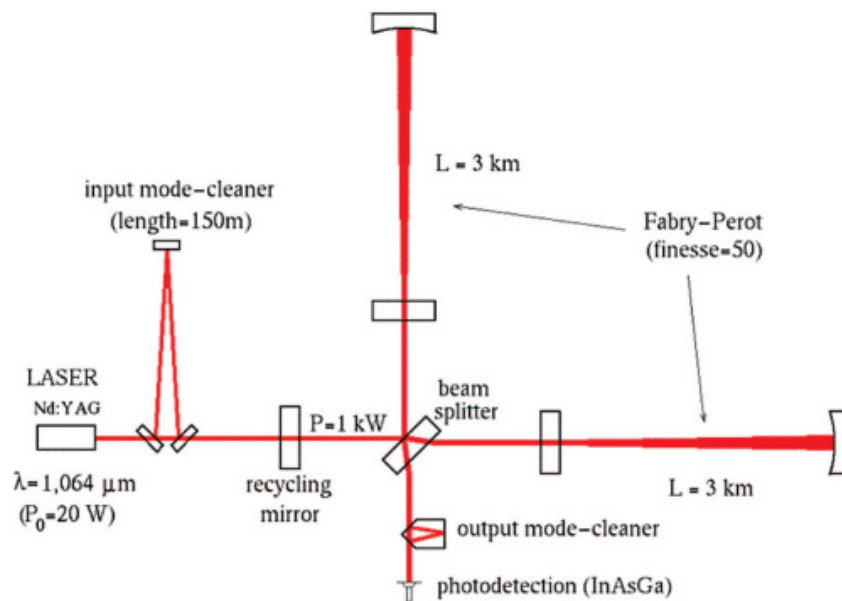


Figura 1.10. Apparato ottico di Virgo.

posto in entrata al *power recycling* con lo scopo di ripulire il laser dalle sue componenti non gaussiane [15].

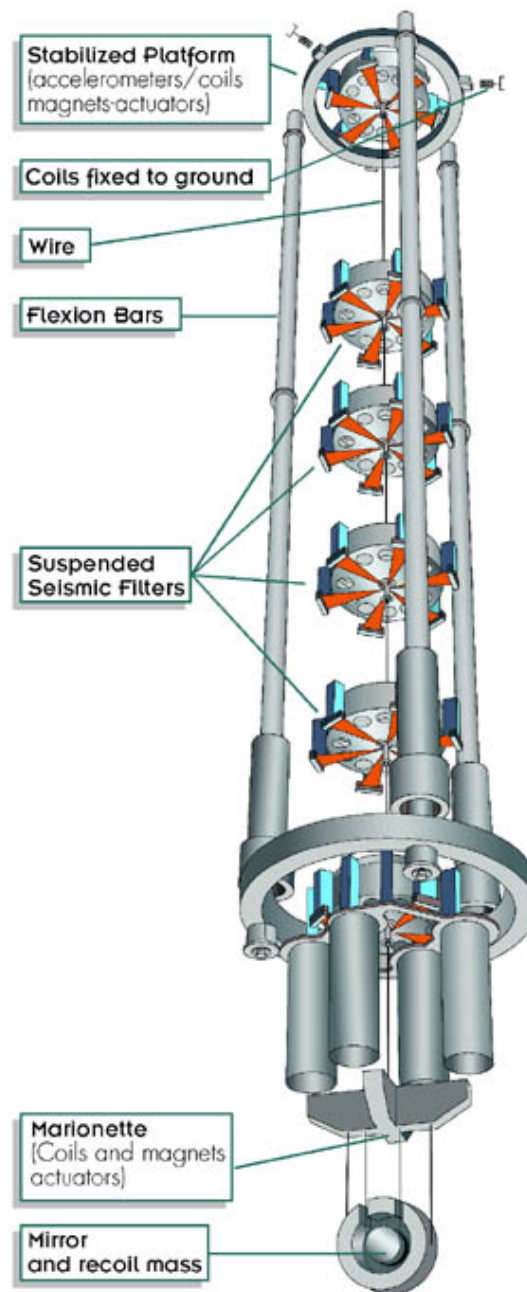
Gli specchi che formano la cavità Fabry-Peròt, il *beam splitter* e lo specchio utilizzato per ottenere il *power recycling* sono stati pensati di dimensioni e masse tali da ridurre il più possibile l'effetto della pressione di radiazione che il laser imprime sulle loro superfici.

Ciascuno specchio è sostenuto da un sistema di sospensioni con cui forma il *superattenuatore* (figura 1.11). Questo sistema è stato costruito con lo scopo di ridurre il rumore sismico, che è la principale fonte di rumore a basse frequenze. Il superattenuatore è costituito da un pendolo invertito, sei sospensioni e un *payload*. Quest'ultimo è formato da uno specchio collegato alle sospensioni tramite una *marionetta* e dalla *massa di reazione*, come indicato in figura 1.12.

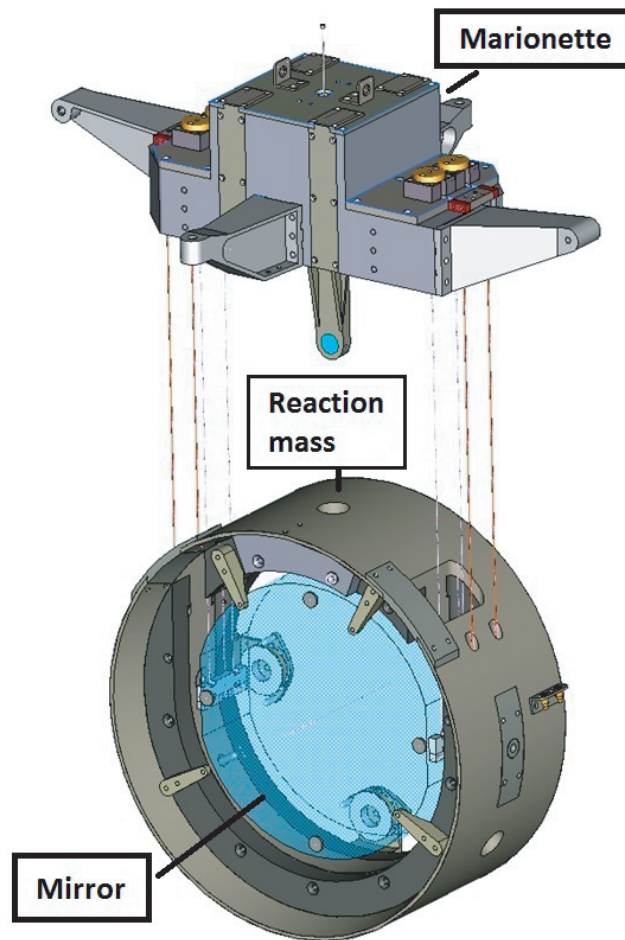
Ogni elemento del superattenuatore è sospeso al precedente tramite un cavo (figura 1.11). L'ultimo di questi elementi (denominato Filtro 7) è costituito da quattro gambe a cui sono attaccate altrettante bobine e sorregge la marionetta tramite cavo. Come possiamo vedere in figura 1.12, questa presenta quattro bracci con agli estremi dei magneti: facendo passare corrente nelle bobine è possibile quindi controllare i gradi di libertà della marionetta riducendo ulteriormente i moti residui delle sospensioni fino a raggiungere il punto di lavoro dell'interferometro (meno di  $1 \mu\text{rad}$  per i gradi di libertà angolari, meno di  $1 \mu\text{m}$  per gli spostamenti lungo la direzione del fascio laser).

Lo specchio, in silice fusa, pende dalla marionetta tramite quattro fibre di lunghezza  $0.70 \text{ m}$  e diametro  $(285 \pm 10) \mu\text{m}$  composte del suo stesso materiale. Queste sono saldate in punti diametralmente opposti sullo specchio chiamati orecchie: tale sistema specchio-fibre è detto *sospensione monolitica*. La scelta dello stesso materiale piuttosto che di materiali differenti per fibre e specchio è stata fatta per ridurre il rumore termico.

Come si vede in figura 1.12, sullo specchio sono presenti quattro magneti utilizzati per controllare i suoi gradi di libertà tramite altrettante bobine: queste sono sorrette dalla *massa di reazione* la cui forma ad anello protegge la superficie laterale dello specchio. La



**Figura 1.11.** Sistema di sospensione in Virgo.



**Figura 1.12.** Struttura del *payload* con marionetta, massa di reazione e sospensione monolitica.

massa di reazione presenta delle aperture per far passare le fibre dello specchio ed anche questa pende dalla marionetta tramite quattro cavi d'acciaio.

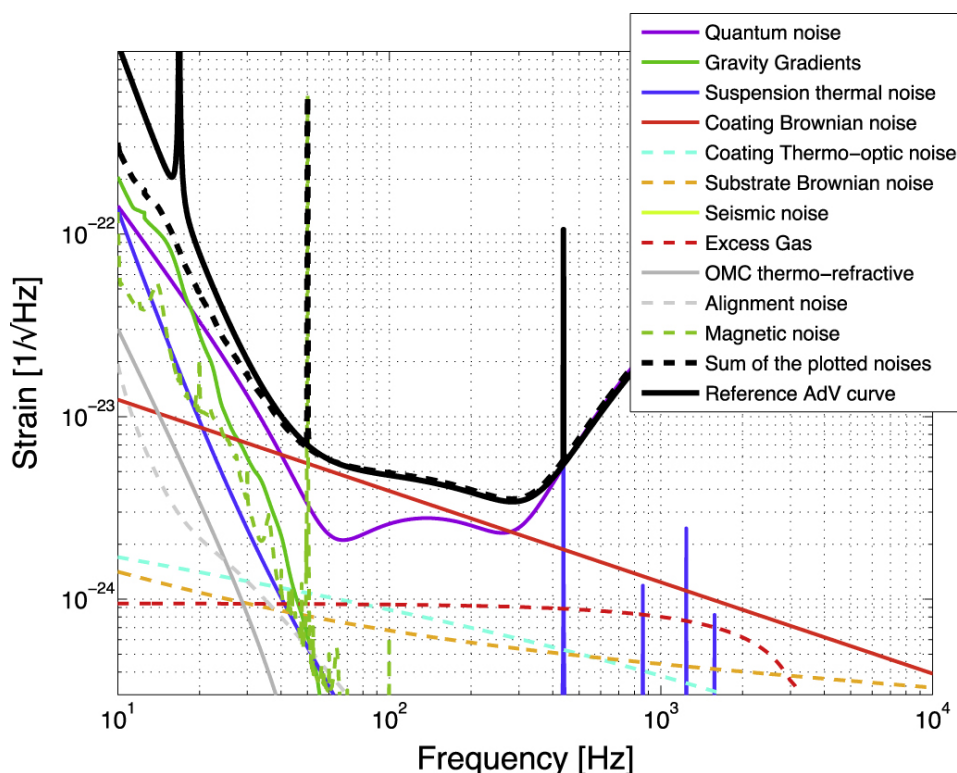
In entrata al Michelson di Virgo è presente un laser Nd:YAG con  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  che produce una potenza di 17 W in grado di ridurre lo *shot noise* rispetto alla precedente configurazione di Virgo [15].

Tenendo conto delle caratteristiche tecniche descritte e dei tipi di dissipazione, minimizzati tramite le scelte che caratterizzano l'apparato sperimentale di Virgo, l'interferometro risulta sensibile ad un intervallo di frequenza tra  $\sim 10 \text{ Hz}$  e  $10 \text{ kHz}$ .

### Miglioramenti in *Advanced Virgo*

*Advanced Virgo* (AdV) è un progetto di miglioramento del rivelatore Virgo che lo ha portato ad essere un interferometro di seconda generazione. Il progetto è quello di arrivare entro il 2020 circa ad aumentare la sensibilità di un ordine di grandezza rispetto al suo predecessore [4], che corrisponde ad aumentare il tasso di rivelazione di 3 ordini di grandezza. In figura 1.13 è possibile vedere la sensibilità teorica di AdV mentre in figura 1.14 si osserva la differenza tra AdV e Virgo+. Rispetto a Virgo+ la maggior parte dei sottosistemi di rivelazione hanno avuto significativi miglioramenti in modo da essere





**Figura 1.13.** Curva di sensibilità teorica di AdV nelle frequenze di acquisizione dati; si possono notare anche gli andamenti delle diverse componenti di rumore.

compatibili con la sensibilità voluta. Il progetto AdV è stato finanziato nel dicembre del 2009 ed è oggi in avanzato stato di installazione. Di seguito esporremo brevemente i principali miglioramenti previsti nella progettazione di AdV, mentre in figura 1.15 è possibile osservare la nuova configurazione ottica [5].

**Configurazione ottica dell'interferometro** AdV sarà un interferometro *dual-recycled*. Oltre al già citato *power recycling*, infatti, sarà inserita anche una cavità *signal-recycling* (SR). Quest'ultima componente ottica, opportunamente regolata, permetterà di modificare la forma della curva di sensibilità ottimizzando il rivelatore per differenti sorgenti astrofisiche. In più, per ridurre l'impatto del rumore termico del rivestimento degli specchi nell'intervallo delle medie frequenze, saranno aumentate le dimensioni dello *spot* del laser sulle masse test. Pertanto risulta necessario spostare il *beam waist* al centro della cavità Fabry-Peròt (circa ad 1,5 km dallo specchio *input*). La *finesse* della cavità stessa sarà maggiore rispetto a quella di Virgo: è stato scelto un valore di riferimento di 433. Avendo un fascio più largo è stato necessario installare un nuovo telescopio *mode matching* all'entrata/uscita dell'interferometro.

**Aumento della potenza del laser** Per aumentare la sensibilità ad alte frequenze è necessario un interferometro con maggior potenza. La sensibilità di riferimento per AdV è stata calcolata assumendo 125 W all'entrata dell'interferometro, dopo l'*Input Mode Cleaner*. Considerando perciò le perdite del sistema di iniezione, il laser



deve produrre una potenza di almeno 175W. Dopo il primo anno di misurazioni a potenza minore (60W), si progetta quindi di installare in seguito un laser da 200 W.

**Altri miglioramenti** Le masse degli specchi sono state raddoppiate (fino a 42 kg) per gestire la nuova pressione di radiazione, nonché per ridurre ancora il rumore termico degli specchi stessi. Anche i *payload* sono stati ridisegnati per aiutare a ridurre il rumore sismico, mentre i superattenuatori di Virgo erano già sufficientemente avanzati da gestire le migliorie previste per AdV (anche se sono in progetto ulteriori miglioramenti per il futuro).



## Capitolo 2

# Procedure

Una volta ottenuti i dati dall'interferometro, devono essere analizzati: esistono vari tipi di analisi differenti, in base al segnale ed al tipo di studio che si vuole effettuare. Qui punteremo la nostra attenzione solo su segnali di onde gravitazionali continue prodotti da stelle di neutroni rapidamente rotanti e caratterizzate da una certa asimmetria. Dopo una sintetica spiegazione dei tipi di analisi possibili nel contesto della rivelazione di segnali di CW, descriveremo la pipeline utilizzata dal gruppo Virgo dell'università di Roma "La Sapienza" per la ricerca su tutto il cielo di tali segnali, dalla quale si partirà per lo studio in esame.

### 2.1 Tipi di analisi

Il modo in cui si effettuano ricerche di segnali CW dipende da quante informazioni (grazie alle osservazioni di emissione di radiazione elettromagnetica) si hanno sulla sorgente. Esistono quindi:

**Ricerche mirate** per stelle di neutroni note, per le quali si conoscono accuratamente posizione nel cielo ed evoluzione in frequenza (es. Crab e Vela).

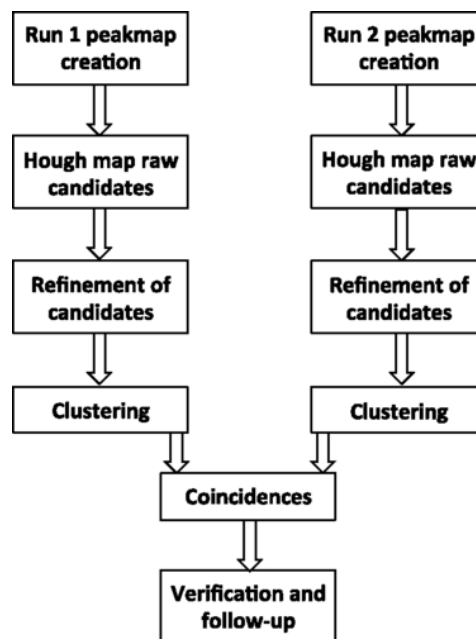
**Ricerche dirette** a stelle di neutroni per le quali si conosce solo la posizione nel cielo (es. Centro galattico, Scorpius X1, Cassiopeia A).

**Ricerche Narrow Band** metodologia intermedia tra quelle appena descritte. Le ricerche *Narrow Band* sono effettuate per segnali di cui si conosce con una certa precisione sia posizione nel cielo che evoluzione ma, supponendo che l'emissione delle onde possa avvenire per fenomeni ad una frequenza leggermente diversa da quella attesa<sup>1</sup>, si vuole effettuare una ricerca un po' più ampia sulla frequenza dell'onda gravitazionale<sup>2</sup> e sulla sua derivata.

**Ricerche su tutto il cielo** (o cieche) per le quali non si ha alcuna informazione sul segnale ricercato, ma si procede studiando un ampio spazio dei parametri e cercando di riconoscere e ricostruire i parametri di ipotetiche sorgenti.

<sup>1</sup>Per esempio, se il nucleo della stella ruotasse in maniera diversa dalla crosta.

<sup>2</sup>Si ricorda che per stelle di neutroni con asimmetria assiale rapidamente rotanti, la frequenza di emissione di onde gravitazionali è  $f_{GW} = 2f_{rot}$  con  $f_{rot}$  frequenza di rotazione della stella.



**Figura 2.1.** Diagramma di flusso con i tratti salienti della *pipeline* del gruppo Virgo della Sapienza.

La strategia utilizzata per estrarre i deboli segnali CW dai dati rumorosi dei rivelatori si basa sul cosiddetto filtro adattato *matched filtering*. La ben nota tecnica di *matched filtering* consiste nel correlare i dati con un *template* (filtro) che descrive l'ampiezza e l'evoluzione della fase del segnale al passare del tempo. Pertanto, una ricerca di segnali di CW consiste nell'utilizzare il metodo *matched filtering* su un insieme di *template*, i cui parametri associati alla fase devono essere scelti per mappare una certa regione di interesse. Per una ricerca di sorgenti non note di CW, si tratta di scandagliare l'intero cielo, un grande intervallo di frequenze e di derivate temporali della frequenza (*spindown*). Purtroppo, il numero di *template* aumenta all'aumentare della durata temporale dei dati da analizzare<sup>3</sup>. Quindi, il *matched filtering* diventa troppo oneroso dal punto di vista computazionale per analizzare lunghe serie di dati e ampie regioni dello spazio dei parametri. Pertanto, per ridurre i tempi di calcolo è necessario ricorrere a metodi gerarchici. In questo tipo di strategie i dati vengono divisi in segmenti più corti. Ogni segmento è analizzato in maniera coerente per poi ricombinare in l'informazione ottenuta dall'analisi dei differenti segmenti attraverso un'analisi incoerente (ciò significa che viene persa l'informazione sulla fase). La sensibilità in ampiezza cresce nel migliore dei casi come la radice quarta del numero di segmenti [1].

## 2.2 Pipeline del gruppo Virgo di Roma

La *pipeline* di seguito descritta è stata sviluppata dal gruppo Virgo dell'università "La Sapienza" di Roma nell'ambito della ricerca su tutto il cielo di onde gravitazionali continue. In figura 2.1 si nota il diagramma di flusso che rappresenta le fasi salienti di tale *pipeline* [8].

<sup>3</sup>Periodi d'integrazione dell'ordine di pochi mesi o anni sono necessari per consentire una rivelazione adeguata.

È stata successivamente verificata l'efficienza di tale *pipeline* partendo dai dati dei *run* scientifici di Virgo, VSR2 e VSR4, ed iniettando in essi dei segnali continui simulati (vedi tabella B.1), noti come *software injections*. Questo viene fatto per testare l'abilità di un algoritmo (che analizza tali dati) ad identificare i medesimi segnali e recuperarne i parametri delle relative sorgenti. La distribuzione dei parametri delle sorgenti simulate è uniforme in frequenza, *spindown*, longitudine eclittica  $\lambda$  e coseno della latitudine eclittica  $\cos\beta$ <sup>4</sup>.

### 2.2.1 Rimozione dei *glitches* nel dominio del tempo

Prima di essere analizzati, i dati ottenuti dal rivelatore vengono ripuliti di quei disturbi noti come *glitches* nel dominio del tempo<sup>5</sup>. La procedura per rimuovere questi effetti è suddivisa in due parti: l'identificazione di tali eventi e la loro rimozione [6].

**Identificazione degli eventi** A causa dei rumori non stazionari la sensibilità del rivelatore varia nel tempo. Questo implica che, se vogliamo imporre una soglia per identificare gli eventi di rumore, questa deve essere *adattiva*, vale a dire deve cambiare nel tempo. Chiamiamo  $x_i$  il nostro campione di candidati. Il *background* è stimato dalla media auto-regressiva del valore assoluto e del quadrato di  $x_i$ :

$$y_i = x_i + w y_{i-1} \quad (2.1a)$$

$$q_i = x_i^2 + w q_{i-1}, \quad (2.1b)$$

con  $y_0 = 0$ ,  $q_0 = 0$  e

$$w = e^{-\frac{\delta t}{\tau}}, \quad (2.2)$$

dove  $\delta t$  è il tempo di campionamento e  $\tau$  è il termine di memoria (in questo caso aventi dimensioni di un tempo) che è stato usato per la media auto-regressiva. Essendo  $w$  un termine che agisce come peso, il fattore di normalizzazione  $Z_i$  è costruito da  $w$  in base alla formula  $Z_i = (1 - w Z_{i-1})$ , con  $Z_0 = 0$ . La media e la deviazione standard sono quindi

<sup>4</sup>Tale scelta è stata fatta data la nota equivalenza tra la superficie di una sfera e quella di un cilindro dimostrata da Archimede.

<sup>5</sup>All'interno dei dati sono presenti alcuni disturbi nel dominio del tempo e della frequenza che, se non propriamente rimossi, riducono in maniera significativa la sensibilità di un certo algoritmo di ricerca, fino addirittura a rendere ciechi in certe frequenze o a certi tempi. L'effetto varia notevolmente in base alla natura o all'ampiezza del disturbo. Questi disturbi si classificano essenzialmente in due classi, che discutiamo brevemente di seguito.

**Glitch nel dominio del tempo** Disturbi istantanei che possono essere approssimati con una delta di Dirac nel dominio, appunto, del tempo. Queste linee aumentano il livello di rumore del rivelatore in un'ampia banda in frequenza (come ci si aspetta facendo la trasformata in frequenza di una delta).

**Linee spettrali di frequenza costante** Nella maggior parte dei casi si tratta di disturbi la cui origine è nota (vedi sezione 1.2.4), come le linee di calibrazione o linee la cui origine è stata scoperta studiando il comportamento del rivelatore e dell'ambiente circostante. Questi prendono la forma di picchi molto stretti nel dominio della frequenza e possono essere eliminati rimuovendo i dati corrispondenti ad un intorno delle frequenze affette.

calcolati come

$$\mu_i = \frac{y_i}{Z_i} \quad (2.3a)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{q_i}{Z_i} - \mu_i^2}. \quad (2.3b)$$

La soglia utile ad identificare i *time glitches* viene quindi imposta alla statistica di rivelazione detta *Critical Ratio* (CR), definita come

$$CR = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}. \quad (2.4)$$

Il valore del tempo di memoria  $\tau$  dipende dall'apparato. Per l'analisi di VSR2 e di VSR4 (come per tutte le analisi riguardanti Virgo+ fatte dal gruppo di Virgo della Sapienza) è stato fissato tale tempo a 600 s, mentre la soglia  $CR_{thr}$  è stata fissata a 6. Definita quindi la soglia adattiva, la procedura fa ciò che segue:

- quando un segnale  $x_i$  va sopra soglia ( $CR > CR_{thr}$ ), si considera avvenuto un evento;
- un evento termina dopo che il segnale è rimasto sotto soglia per un tempo maggiore del *tempo morto*, un valore fissato ad 1 s;
- l'evento è descritto da alcuni parametri. Qui utilizzeremo il suo tempo d'inizio e la sua durata, definita come il tempo dall'inizio dell'evento al suo termine sottratto del tempo morto<sup>6</sup>.

**Rimozione degli eventi** Si definisce ora il valore detto *bordo* (che in questo caso è stato scelto di 0, 1s). Questo valore indica quanti secondi prima e dopo l'evento sono utilizzati nella pulizia dei dati. A questo punto i dati tra l'inizio dell'evento e la sua fine (inizio+durata) vengono messi a 0; i tempi compresi tra (inizio-bordo) e l'inizio vengono linearmente mandati a 0; i tempi compresi tra la fine e (fine+bordo) vengono linearmente mandati da 0 al valore misurato del segnale.

## 2.2.2 Studio tempo-frequenza

Una volta eliminati i disturbi nel dominio del tempo, il segnale subisce una serie di studi nel dominio *tempo-frequenza* in modo da riuscire a ricostruire il più possibile il segnale in funzione del tempo e della posizione celeste. Questa parte si divide in tre processi diversi: la creazione del cosiddetto SFDB (*Short Fourier Database*), la creazione della *peakmap* e la correzione dell'effetto Doppler dovuto al moto di rotazione e rivoluzione della Terra.

### SFDB

La creazione dello *Short Fourier Database* (SFDB) è descritta diffusamente in [7]. Brevemente l'SFDB consiste in una collezione di *Fast Fourier Transform* (FFT) ottenute sui dati ripuliti come spiegato nella sezione precedente. Come è noto, una FFT induce

<sup>6</sup>Gli altri parametri, che trascuriamo in questa trattazione, sono istante della massima ampiezza e massima ampiezza dell'evento.



una discretizzazione in frequenza pari all'inverso della sua durata (*tempo di coerenza*). Si sceglieranno quindi FFT sufficientemente corte da garantire che la frequenza di un segnale non si sposti mai più di un passo di discretizzazione a causa dello *spindown* della sorgente e dell'effetto Doppler dovuto ai moti della Terra. Inoltre, per ridurre la dispersione di potenza dovuta alla lunghezza finita di ciascuna FFT, queste sono interallacciate a metà della loro durata. Il tempo di coerenza per i dati usati è di  $T_{\text{FFT}} = 8192$  s, che corrisponde ad una risoluzione in frequenza di  $\delta f = \frac{1}{T_{\text{FFT}}} = 1,22 \times 10^{-4}$  Hz [2, 8].

### Peakmap

Dall'SFDB si costruisce quindi la cosiddetta *peakmap*: una mappa nel dominio *tempo-frequenza*, creata scegliendo tra i dati delle FFT i massimi locali (o picchi) più significativi. Sono considerati più significativi quei picchi per i quali un dato estimatore R superi un valore di soglia. Mostriamo come viene stabilito l'estimatore R.

Cominciamo creando una media auto-regressiva dello spettro di potenza che rappresenti una sorta di valore atteso per una data frequenza. Per fare questo prendiamo uno spettro di potenza con risoluzione in frequenza  $\delta f$ . Sia allora  $x_i$  il valore assoluto di tale spettro per ogni campione  $i = 1, \dots, N$ , essendo  $N$  la lunghezza di FFT [2, 6, 8]. Definiamo le seguenti grandezze:

$$w = e^{-\frac{\delta f}{\tau}} \quad (2.5a)$$

$$y_i = x_i + w y_{i-1} \quad (2.5b)$$

$$Z_i = (1 - w Z_{i-1}) \quad \text{con } Z_0 = 0. \quad (2.5c)$$

Queste grandezze sono molto simili a quelle definite nella sezione 2.2.1 per rimuovere i disturbi nel dominio del tempo. Da notare comunque che questa volta il termine di memoria è dimensionato come una frequenza. A questo punto la media auto-regressiva sarà:

$$\mu_i = \frac{y_i}{Z_i}, \quad (2.6)$$

mentre l'estimatore che cercavamo sarà semplicemente il rapporto

$$R = \frac{x_i}{\mu_i}. \quad (2.7)$$

Il concetto che si cela dietro questa procedura è quello di valutare un termine medio dello spettro di potenza per poter identificare quei picchi che ne escono fuori.

A questo punto, come detto prima, sono selezionati quei picchi il cui R superi una soglia, stabilita empiricamente e che risulta pari a  $R_{\text{thr}} = \sqrt{2,5}$ .

Una volta costruita la *peakmap*, questa viene quindi ripulita da quei picchi dovuti ai disturbi nel dominio delle frequenze.

### Correzione dell'effetto Doppler

A questo punto si effettua la correzione dell'effetto Doppler. Questa procedura è concettualmente semplice, sebbene sia complicata a livello pratico (poiché non è semplice calcolare con la precisione necessaria la velocità della Terra). Mostriamo di seguito brevemente alcune considerazioni a riguardo.

Ciò che stiamo cercando di fare è di spostare le frequenze dei picchi di un ammontare corrispondente alla variazione di frequenza che subirebbe un segnale proveniente da ognuna delle direzioni di cielo considerate. Ricordiamo che l'effetto Doppler, ipotizzando di poter trascurare il moto proprio della sorgente (che è vero se la distanza della sorgente è  $\gtrsim 10$ pc) [1], è del tipo

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{\vec{V}_T \cdot \hat{n}}{c} \right), \quad (2.8)$$

dove  $V_T$  è la somma delle velocità di rotazione e rivoluzione terrestre. Mettiamoci ora in coordinate eclittiche geocentriche e trascuriamo la rotazione terrestre. Sotto queste condizioni la velocità della Terra dipende solo dalla longitudine eclittica del Sole  $\lambda_S$ , in quanto la sua latitudine eclittica  $\beta_S \equiv 0$ <sup>7</sup>. Supponiamo allora di avere una sorgente con coordinate eclittiche  $\lambda$  e  $\beta$ . Facendo il prodotto scalare tra il versore posizione nel cielo<sup>8</sup> ed il versore velocità della Terra<sup>9</sup> si ottiene

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{|\vec{V}_T|}{c} \cos(\beta) \sin(\lambda - \lambda_S) \right). \quad (2.9)$$

A questo punto conviene considerare una griglia nel cielo per effettuare queste correzioni. Inizialmente si farà un'analisi su una griglia lasca, per poi raffinarla in seguito (vedi il successivo paragrafo 2.2.3) [2, 8].

Per costruire la griglia consideriamo l'equazione (2.9) e, considerando il moto della Terra circolare, inseriamo per comodità  $|\vec{V}_T| = \mathcal{R}\Omega_{\text{ORB}}$ , dove  $\mathcal{R}$  è il raggio dell'orbita della Terra e  $\Omega_{\text{ORB}}$  è la velocità angolare della Terra. Si richiede che un passo in una delle due direzioni del cielo corrisponda ad un passo nella frequenza corretta dall'effetto Doppler. Quindi:

$$\delta f = \frac{1}{T_{\text{FFT}}} = \frac{df}{d\lambda} \delta\lambda = \frac{df}{d\beta} \delta\beta \quad \Rightarrow$$

$$\delta\lambda = \left| \frac{\delta f}{\frac{df}{d\lambda}} \right| = \left| \frac{\delta f}{f_0 \frac{\Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R}}{c} \cos(\beta) \cos(\lambda - \lambda_S)} \right| = \left| \frac{c \delta f}{f_0 \Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R} \cos(\beta) \cos(\lambda - \lambda_S)} \right|, \quad (2.10a)$$

$$\delta\beta = \left| \frac{\delta f}{\frac{df}{d\beta}} \right| = \left| \frac{\delta f}{f_0 \frac{\Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R}}{c} \sin(\beta) \sin(\lambda - \lambda_S)} \right| = \left| \frac{c \delta f}{f_0 \Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R} \sin(\beta) \sin(\lambda - \lambda_S)} \right|. \quad (2.10b)$$

L'unico limite di questo discorso è che  $\lambda_S$  varia nel tempo (data la rotazione della Terra), mentre noi siamo interessati ad una discretizzazione che resti costante per tutti i tempi, in quanto vorremo poi spostarci in uno spazio indipendente dal tempo tramite la Trasformata di Hough (vedi 2.2.3). Per rimediare a questo massimizzeremo la parte della funzione che contiene  $\lambda_S$ :

<sup>7</sup>In coordinate eclittiche geocentriche il moto relativo del Sole rispetto alla Terra avviene lungo l'eclittica. Poiché la latitudine eclittica  $\beta_S$  misura la distanza angolare di un corpo celeste dal piano dell'eclittica, per il Sole tale valore è zero.

<sup>8</sup> $\hat{n} = (\cos(\beta) \cos(\lambda), \cos(\beta) \sin(\lambda), \sin(\beta))$ .

<sup>9</sup>Se consideriamo il versore Terra-Sole  $\hat{v} = (\cos(\lambda_S), \sin(\lambda_S), 0)$ , si ottiene facilmente il versore velocità della Terra. Poiché la Terra si muove in senso antiorario, la derivata del versore equivale, in approssimazione di orbita circolare, ad aggiungere  $\pi/2$  a  $\lambda_S$ .

$$\delta\lambda = \max_{\lambda_S \in [-\pi; \pi]} \left| \frac{c\delta f}{f_0 \Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R} \cos(\beta) \cos(\lambda - \lambda_S)} \right| = \left| \frac{2}{N_D \cos\beta} \right|, \quad (2.11a)$$

$$\delta\beta = \max_{\lambda_S \in [-\pi; \pi]} \left| \frac{c\delta f}{f_0 \Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R} \sin(\beta) \sin(\lambda - \lambda_S)} \right| = \left| \frac{2}{N_D \sin\beta} \right|, \quad (2.11b)$$

$$\text{con } N_D = \frac{2f_0 \Omega_{\text{ORB}} \mathcal{R}}{c\delta f}.$$

A questo punto si può creare la griglia sul cielo, ricordando che  $N_D$ <sup>10</sup>, e quindi la griglia, dipendono dalla frequenza in studio.

Poiché, come è stato mostrato, l'effetto Doppler dipende tanto dalla posizione del segnale quanto dalla frequenza a cui questo è emesso, per mantenere il segnale all'interno di un singolo passo di frequenza per tutta la durata della FFT è necessario che il numero di punti nel cielo ( $N_{\text{sky}}$ : *sky patches*) cresca con il quadrato della frequenza (infatti  $N_{\text{sky}} \approx 4\pi N_D^2$ ). In particolare abbiamo quindi 2492 punti a 20 Hz e 81244 punti a 128 Hz. Per via del ragionamento di cui sopra è più comodo costruire la griglia in coordinate eclittiche [2].

### 2.2.3 Trasformata di Hough

Ogni *peakmap* corretta è l'input della *Frequency-Hough Transform*. Questo strumento si basa sull'idea di mappare un punto con coordinate  $(x, y)$  in una retta su un piano ortogonale  $(m, q)$  secondo l'equazione

$$y = mx + q. \quad (2.12)$$

In questo modo, se abbiamo dei *pattern* lineari, è abbastanza chiaro che il punto di intersezione tra le rette nel piano ortogonale fornirà esattamente quei valori di  $m$  e di  $q$  che regolano l'andamento della retta.

Nel caso specifico, si trasforma il piano (*tempo, frequenza*) nel piano ortogonale  $f/\dot{f}$ , ossia (*frequenza, spindown*) secondo la relazione

$$f = f_0 + \dot{f}(t - t_0), \quad (2.13)$$

dove  $f_0$  e  $\dot{f}$  sono frequenza e *spindown* della sorgente al tempo di osservazione iniziale  $t_0$ , mentre  $t$  è il tempo di inizio associato ad una *peakmap*. Per fare questo si costruisce una griglia nel piano  $f/\dot{f}$ . Poiché la trasformazione dalla *peakmap* al piano di Hough non è computazionalmente dipendente dal valore dell'intervallo di frequenza (che impatta invece sulla dimensione del piano di Hough), riduciamo il passo di discretizzazione ad 1/10 del valore ottenuto dalla FFT, in modo da ridurre le perdite dovute agli effetti di digitalizzazione. Per questo motivo la risoluzione finale in frequenza è  $\delta f_H = 1,22 \times 10^{-5}$  Hz.

Per quanto riguarda i valori dello *spindown* da ricercare, è opportuno sceglierli in maniera tale che da un lato si includano valori di *spindown* della maggior parte delle *pulsar* note e dall'altro che non aumenti troppo il tempo di calcolo computazionale. La

<sup>10</sup>  $N_D$  è in sostanza il numero di passi di ciascuna delle coordinate celesti influenzati dall'effetto Doppler.

scelta fatta è stata  $[-1,0 \times 10^{-10}, +1,5 \times 10^{-11}] \text{ Hz s}^{-1}$ . L'asimmetricità del *range* è data dal fatto che, sebbene siano noti effetti che fanno aumentare la frequenza di rotazione di una stella di neutroni, solitamente la perdita di energia tende a farla diminuire, rendendo più comuni gli *spindown* negativi. È immediato osservare che lo *step* in *spindown* debba scalare con il reciproco del tempo di osservazione, ossia  $\delta\dot{f} = \delta f / T_{\text{obs}}$ . Evidenziamo che i dati usati per questo studio, (VSR2 e VSR4) avendo tempi di osservazione diversi, hanno quindi un  $\delta\dot{f}$  diverso: per VSR2  $\delta\dot{f} = 7,63 \times 10^{-12} \text{ Hz s}^{-1}$ , che corrisponde ad avere  $N_{\text{sd}} = 16$  valori di *spindown* diversi, mentre per VSR4,  $\delta\dot{f} = 1,5 \times 10^{-11} \text{ Hz s}^{-1}$ , e  $N_{\text{sd}} = 9$  [2].

Per un dato punto nel cielo, il risultato della *Frequency-Hough Transform* è un istogramma nel piano  $f/\dot{f}$  chiamato Mappa di Hough. A questo punto vengono scelti i candidati più significativi (ovvero le celle con ampiezza maggiore nella mappa di Hough) [8] e si esegue una ricerca più raffinata intorno ai relativi parametri ottenendo i candidati raffinati di primo livello. Questa ricerca si svolge con la stessa procedura già descritta, usando una sovra-risoluzione in  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\dot{f}$  in modo da ridurre maggiormente le perdite indotte dagli effetti di digitalizzazione [2]. La scelta del parametro di sovra-risoluzione è stata fatta cercando di bilanciare la riduzione della perdita per effetti di digitalizzazione e l'aumento dei tempi di calcolo. Essendo, invece, la griglia in frequenza già sovra-risolta non si sono fatti ulteriori aumenti di risoluzione. Per lo *spindown* è stata applicata una sovra-risoluzione di un fattore  $K_{\dot{f}} = 6$ , ovvero l'intervallo della griglia lasca tra un valore di *spindown* ed il successivo (da entrambi i lati) è stato diviso ancora in 6 parti. Lo studio nella scala raffinata include i 12 valori minori e gli 11 maggiori rispetto allo *spindown* del candidato scelto nella griglia lasca. Si è fatta questa scelta poiché, facendo in parallelo la ricerca raffinata anche per la posizione, per via della correlazione dei parametri lo *spindown* può essere trovato anche fuori dal suo originario intervallo lasco. La griglia in posizione viene raffinata con un fattore di sovra-risoluzione pari a  $\hat{K}_{\text{sky}} = 5$  per ognuna delle due coordinate, dividendo effettivamente la posizione di cielo lasca in 25 nuovi punti e selezionando tutti i punti fini all'interno della griglia lasca [8].

### 2.3 Clustering e coincidenze

I dati ottenuti da questa analisi vengono messi in matrici  $n \times 9$  che contengono ciascuna 10 Hz di dati;  $n$  è il numero di candidati per ogni matrice ed è di ordine  $10^8$ . Poiché il numero di candidati scala come  $1/f$  per via della correzione Doppler [2], ma aumenta come  $f^2$  per via dell'aumento dei punti nel cielo, il totale dei candidati aumenta proporzionalmente alla frequenza. Le 9 componenti di questo vettore sono in ordine: la frequenza  $f$ , le coordinate eclittiche  $\beta$  e  $\lambda$ , lo *spindown*  $\dot{f}$ , l'ampiezza di segnale rivelato  $A$ , il *Critical Ratio* CR, gli errori sulle coordinate eclittiche  $\delta\beta$  e  $\delta\lambda$ , l'ampiezza di segnale emesso dall'onda gravitazionale  $h$  (aggiunta solo dopo la calibrazione).

Si osserva innanzitutto che la probabilità che il  $j$ -esimo valore in frequenza dell' $i$ -esima FFT abbia una statistica R compresa tra  $x$  ed  $x + dx$  si vede essere pari a  $e^{-x}$  [8]. È immediato, allora, rendersi conto che la probabilità che questo valore sia un massimo locale è pari alla probabilità che i due elementi primi vicini in frequenza siano minori, con probabilità  $1 - e^{-x}$  ciascuno. La probabilità  $p_0$  che un picco venga scelto (e sia quindi sopra soglia) è

$$p_0 = \int_{R_{\text{thr}}}^{\text{inf}} e^{-x} (1 - e^{-x})^2 dx = e^{-R_{\text{thr}}} - e^{-2R_{\text{thr}}} + \frac{1}{3} e^{-3R_{\text{thr}}}. \quad (2.14)$$

Detto  $n$  il numero di conteggi nella mappa di Hough, scriviamo quindi il CR come

$$\text{CR} = \frac{n - Np_0}{\sqrt{Np_0(1 - p_0)}}, \quad (2.15)$$

dove  $N$  è il numero delle FFT. Questo parametro, che dipende dalla soglia imposta su  $R$ , può essere utilizzato come mostrato in [8] per valutare quale sia il valore di soglia migliore. Inoltre è un ottimo parametro da usare per valutare se un candidato sia associabile ad una sorgente o meno. Si vede che il CR così definito segue una distribuzione binomiale [8].

I passi successivi sono molto importanti in quanto lo studio su cui verte la presente dissertazione propone miglioramenti ad una parte delle procedure usate finora per quanto riguarda il tempo di calcolo.

Il concetto di base che guida i passaggi successivi è l'assunzione che una sorgente generi un candidato con alta statistica di rivelazione (alto CR quindi) su ogni rivelatore diverso (o su ogni *run* dello stesso rivelatore, come nel caso in esame), mentre mai (o quasi mai) questo succeda a causa del rumore. Di conseguenza, se una distanza nello spazio dei parametri (che dobbiamo definire) tra due candidati di *run* diversi con alta statistica di rivelazione è minore o uguale ad una certa soglia (tale da considerarsi quasi lo stesso punto), questi candidati si considerano essere generati dalla stessa sorgente e quindi avranno parametri molto vicini a quelli della sorgente stessa. I candidati associati a queste sorgenti verranno usati successivamente per analisi più approfondite. La procedura di ricerca di questo tipo di candidati tra quelli prodotti dalle diverse prese dati dei rivelatori è detta *tecnica delle coincidenze*. Prima di cercare le coincidenze, in ogni caso, è necessario raggruppare i candidati in *cluster*, in modo tale da ridurre il costo computazionale della procedura. Un *cluster* è una collezione di candidati tali che la distanza  $d$  nello spazio dei parametri a quattro dimensioni tra ogni coppia di punti di questa collezione sia minore di una soglia  $d_{\text{clust}}$ . È quindi necessario, innanzi tutto, definire una sorta di metrica tra parametri che hanno diverse dimensioni fisiche. Definiamo quindi una differenza adimensionale tra due parametri dello stesso tipo:

$$\Delta^{(a)} x \equiv \frac{x_2 - x_1}{\delta x} \quad \text{con } \delta x \equiv \frac{\delta x_1 + \delta x_2}{2}, \quad (2.16)$$

con  $x_1$  e  $x_2$  generiche coordinate ( $f$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\dot{f}$ ) nello spazio dei parametri e  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$  i relativi passi<sup>11</sup>.

A questo punto si può definire una distanza  $d$

$$d \equiv \sqrt{(\Delta^{(a)} f)^2 + (\Delta^{(a)} \dot{f})^2 + (\Delta^{(a)} \lambda)^2 + (\Delta^{(a)} \beta)^2} \quad (2.17)$$

ed una soglia  $d_{\text{clust}}$  che è stata fissata empiricamente a 2 [2]. Dopo aver trovato i *cluster* per i due *set* di dati, le frequenze dei candidati vengono ricondotte ad uno stesso tempo per essere rese compatibili, sottraendo a ciascuna di esse lo *spindown* relativo moltiplicato

<sup>11</sup>Ricordiamo che per  $\lambda$  e  $\beta$  le risoluzioni  $\delta\lambda$  e  $\delta\beta$  non sono costanti ma dipendono dalla frequenza e da  $\beta$  - come si evince dalle equazioni (2.11)

per la differenza tra i tempi di inizio di VSR4 e VSR2. Questo problema si pone perché VSR2 e VSR4 sono dati presi ad intervalli temporali molto lontani. Dopo di ciò, per ogni *cluster* del primo *set* di dati (ad esempio VSR2) viene effettuato un controllo con i *cluster* del secondo *set* (ad esempio VSR4) per vedere quali di questi si sovrappongano con il primo: se i parametri sono compatibili i *cluster* vengono considerati potenzialmente coincidenti. A questo punto, per ogni coppia di *cluster* potenzialmente coincidenti, ogni candidato del primo *cluster* viene confrontato con tutti i candidati del secondo *cluster* valutandone la distanza: se almeno una distanza è minore di  $d_{\text{coin}} = 2$ , i due *cluster* vengono considerati coincidenti. Ottenuti i *cluster* coincidenti si cerca la coppia dei candidati, presi ciascuno da uno dei *cluster*, la cui distanza tra loro sia la minima e quei candidati vengono considerati coincidenti. La scelta di  $d_{\text{coin}}$  è stata basata su uno studio di segnali *software-injection* in modo da ridurre la probabilità di falso allarme, ma allo stesso tempo da recuperare il numero più alto possibile di segnali [2].

Una volta trovati i segnali si procede con una procedura di *ranking* per ridurre il numero di candidati in coincidenza e si conclude la procedura con il cosiddetto *follow up*. L'idea alla base di tale procedura è quella di ripetere l'analisi finora fatta aumentando la sensibilità. Questo viene fatto utilizzando i parametri ottenuti nell'analisi precedente per fare una ricerca più accurata solo nell'intorno del segnale ricostruito in una sorta di ricerca *targeted*.

Maggiori dettagli sulla teoria delle coincidenze può essere trovata in appendice di [8].

## Capitolo 3

# Nuovi algoritmi per scremare grandi moli di candidati

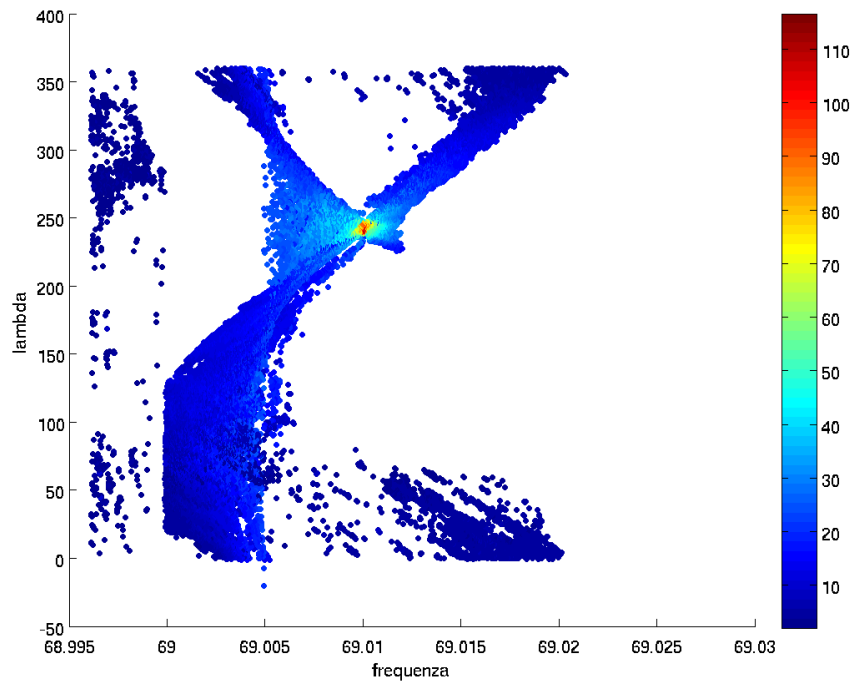
In questo capitolo si descriverà il lavoro fatto, riportando i risultati più importanti e presentando brevemente ulteriori percorsi di ricerca che sono emersi durante il lavoro e che saranno oggetto di studio in una prossima fase.

Nel lavoro svolto si è andati ad analizzare la procedura di coincidenze descritta in sezione 2.3 al fine di migliorarla riducendo l'insieme di potenziali candidati di onde continue ad un sottoinsieme più significativo. Dovendo infatti il vecchio algoritmo confrontare grosse moli di dati, risultava piuttosto lento.

Il problema fondamentale che si è riscontrato durante il presente studio è che tra i candidati ottenuti attraverso le procedure precedenti, molti sono dei *falsi allarmi*, ossia dovuti a disturbi strumentali non ancora rimossi. Inoltre non è sufficiente cercare i massimi relativi di CR all'interno dei dati, in quanto da un lato tale grandezza tende ad oscillare parecchio anche a causa di fluttuazioni di rumore e dall'altro il massimo valore di CR, anche qualora sia effettivamente attribuibile ad un segnale continuo, non garantisce sempre di recuperare con esattezza i parametri che caratterizzano la relativa sorgente.

La soluzione migliore è quella di cercare di identificare i candidati generati effettivamente da una data sorgente e discriminare così quelli dovuti a disturbi. Il metodo di porre una soglia fissa sul CR in modo da eliminare i candidati con CR inferiore risulta inefficace, in quanto il fondo di rumore in alcune frequenze supera di molto i candidati associabili ai segnali più deboli situati in altre frequenze.

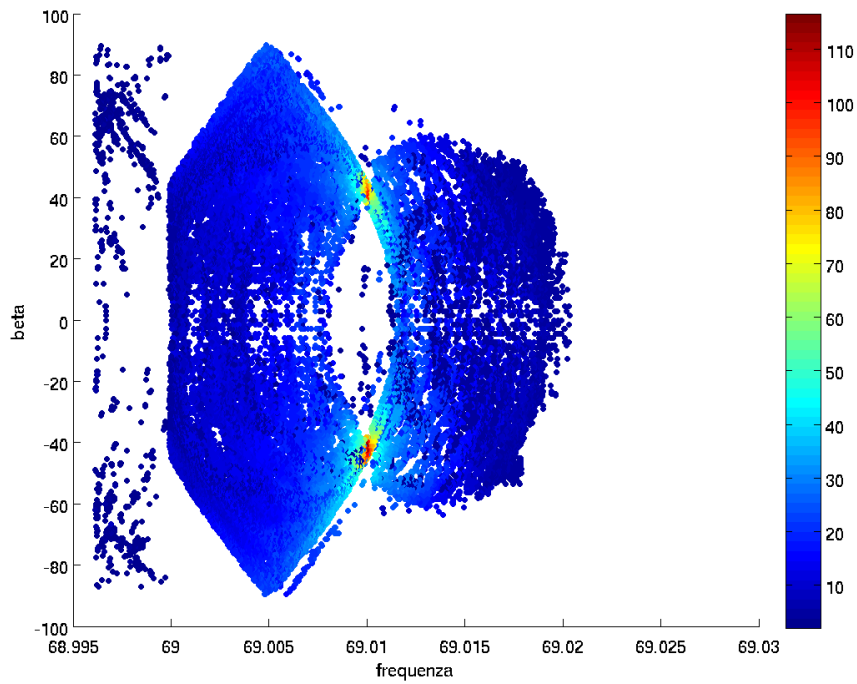
Punto chiave della soluzione, allora, è stato notare come i candidati verosimilmente generati da una stessa sorgente (e quindi con alta statistica di rivelazione) si raggruppano lungo curve molto precise (*pattern*) nello spazio quadridimensionale dei parametri ( $f$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\hat{f}$ ). Identificare i candidati che giacciono su queste curve permetterebbe allora di ripulire efficacemente i candidati e quindi di ricostruire molto più facilmente e/o velocemente i parametri della sorgente che li ha generati. Nonostante questo sia stato il risultato più importante dello studio, sono state svolte altre ricerche per proporre metodi alternativi da applicare sui dati scremati per recuperare correttamente i parametri di una certa sorgente. Evidenziamo comunque come la scrematura non levi i candidati più importanti, lasciando la possibilità di utilizzare il vecchio metodo su questo insieme di candidati molto ridotto e velocizzando notevolmente i tempi di calcolo. Nelle figure da 3.1 a 3.6 sono raffigurati



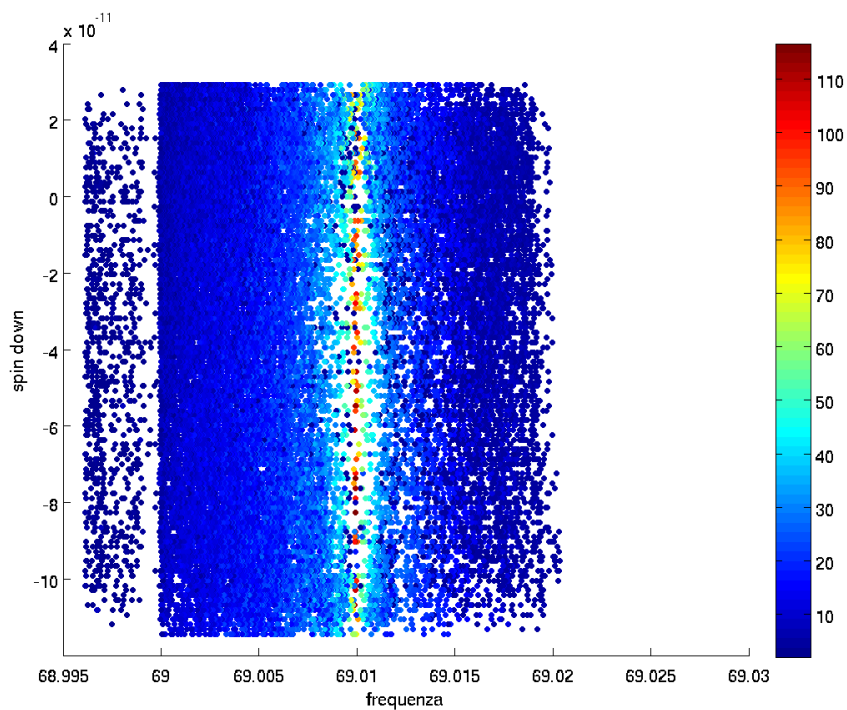
**Figura 3.1.** *Pattern* di candidati proiettati nel piano  $f/\lambda$ ; la *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.

i candidati a frequenza compresa tra 68.885 e 69.0025 Hz corrispondenti alla *software injection* di parametri [ $f = 69,01$  Hz,  $\lambda = 239,97^\circ$ ,  $\beta = -41,003^\circ$ ,  $-8,279110^{-11}$  Hz s $^{-1}$ ]. Nelle figure 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 sono molto visibili i *pattern* prodotti dai candidati generati da una sorgente; nella sezione 3.1 si spiegherà quali siano tali *pattern* e per quale motivo si formino. Nelle figure 3.5 e 3.6 non risulta evidente alcun *pattern*; come vedremo questo fatto non solo è facilmente spiegabile, ma è anche utile perché permetterà di studiare un *pattern* separatamente dall'altro (vedi sezione 3.2).

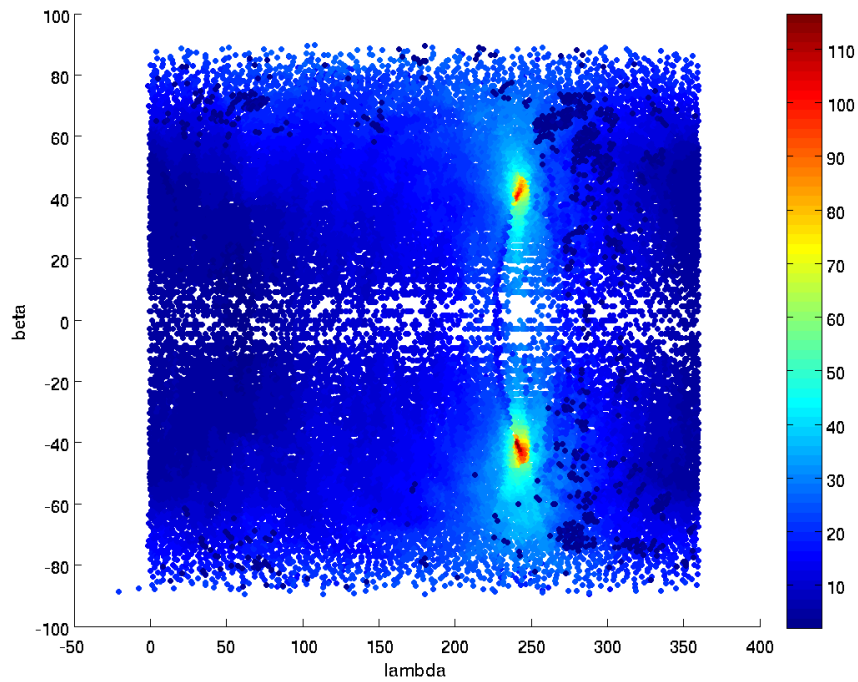




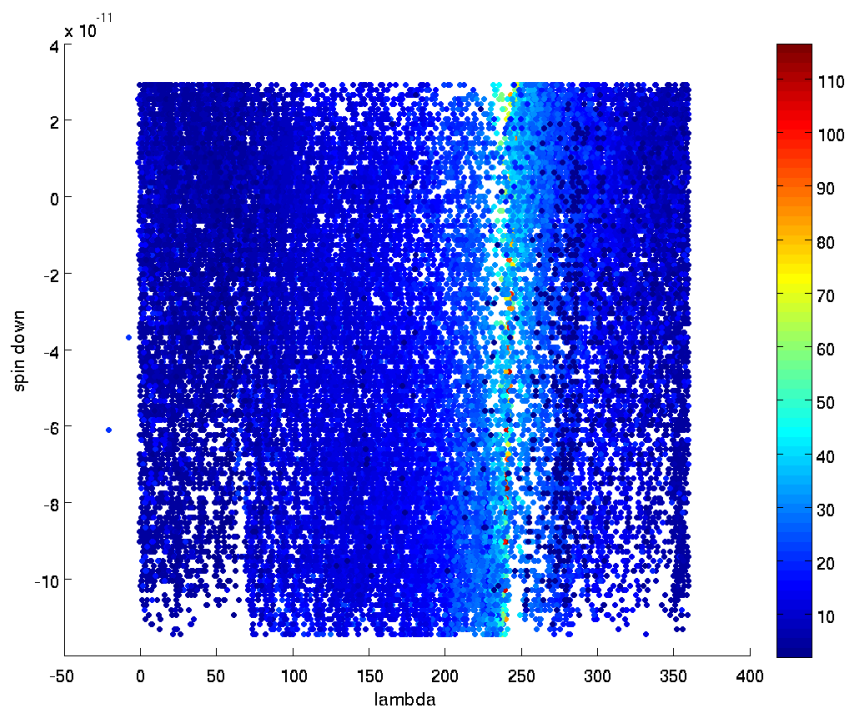
**Figura 3.2.** Pattern di candidati proiettati nel piano  $f/\beta$ ; la *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.



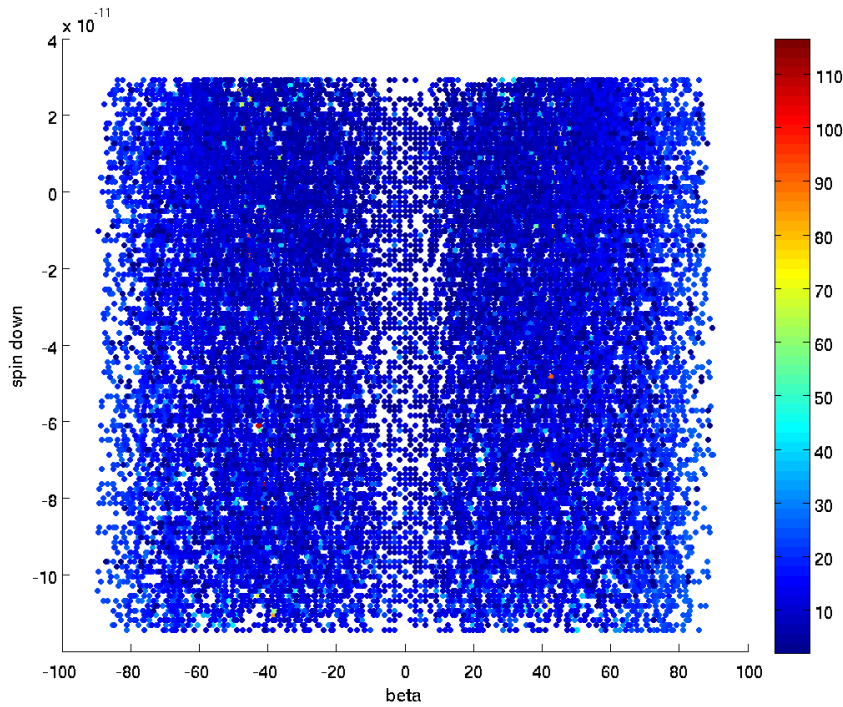
**Figura 3.3.** Pattern di candidati proiettati nel piano  $f/\hat{f}$ ; la *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.



**Figura 3.4.** *Pattern* di candidati proiettati nel piano  $\lambda/\beta$ ; la *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.



**Figura 3.5.** Candidati proiettati nel piano  $\lambda/\hat{f}$ ; non è visibile alcun *pattern*. La *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.



**Figura 3.6.** Candidati proiettati nel piano  $\beta/\dot{f}$ ; non è visibile alcun *pattern*. La *colour bar* verticale indica il valore di CR associato ad ogni candidato.

### 3.1 Dal segnale rivelato al *pattern* di candidati

Il passo fondamentale è stato quello di scoprire come e perché i candidati generati da una stessa sorgente esibiscono i *pattern* mostrati nelle figure 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. In altre parole cerchiamo di capire come un segnale, generato da una data sorgente con determinati parametri, generi un *set* diverso di candidati.

Mettiamoci per semplicità nel caso di un rivelatore completamente privo di ogni tipo di rumore. Supponiamo di rivelare un unico segnale proveniente da una specifica sorgente. Tale sorgente avrà parametri  $f_{\text{SOUR}}$ ,  $\lambda_{\text{SOUR}}$ ,  $\beta_{\text{SOUR}}$  e  $\dot{f}_{\text{SOUR}} = 0$  (per semplicità). Nel giungere al rivelatore la frequenza del segnale sarà modificata per via dell'effetto Doppler (dovuto ai moti di rotazione e di rivoluzione della Terra), con una regola che è quella dell'equazione (2.9) con  $\lambda_S$  dipendente dal tempo. Chiamiamo questa nuova frequenza  $f_D(t) = f_D(\lambda_S(t))$ .

Ricordiamo che la durata di ogni FFT è scelta in modo tale che la variazione di frequenza dovuta all'effetto Doppler non sia più grande di  $\delta f = \frac{1}{T_{\text{FFT}}}$  (vedi 2.2.2). Quindi, per ogni tempo di inizio associato ad una FFT, si ha una frequenza  $f_D$  ricostruita.

Una volta selezionati i picchi e costruita la *peakmap* (secondo quanto detto nella sezione 2.2.2), per ogni posizione di cielo considerata, il segnale viene corretto in frequenza per rimuovere l'effetto Doppler che sarebbe indotto se il segnale provenisse da tale posizione. Considerando trascurabile la rotazione della Terra, troveremo la frequenza

corretta attraverso l'equazione

$$f_{\text{corr}}(t_i, \lambda_j, \beta_k) = f_D \frac{1}{1 + \frac{\Omega_{\text{orb}} R_{\text{orb}}}{c} \cos(\beta_k) \sin(\lambda_j - \lambda_0)} \quad (3.1)$$

$$\sim f_D \left( 1 - \frac{\Omega_{\text{orb}} R_{\text{orb}}}{c} \cos(\beta_k) \sin(\lambda_j - \lambda_0) \right),$$

con  $t_i$   $i$ -esimo tempo di FFT (con  $i = 1 \dots N$ , essendo  $N$  numero totale delle FFT) e  $\lambda_j$  e  $\beta_k$  rispettivamente  $j$ -esimo e  $k$ -esimo valore delle coordinate eclittiche (il cui numero massimo dipende dalla discretizzazione della griglia descritta in sezione 2.2.2);  $\lambda_0$  è una fase che dipende dall'istante di inizio e dall'istante di fine della presa dati e che quindi va valutato per ogni diverso *run*. Si noti che l'ultimo termine della equazione (3.1) è un'espansione di Taylor al primo ordine che trascura i valori di ordine  $f 10^{-8}$ , la qual cosa cambierà lievemente il valore della statistica finale senza alterare quanto è stato descritto.

Ci si aspetta che se le coordinate eclittiche considerate sono quelle da cui proviene realmente il segnale (quindi  $\lambda_j \simeq \lambda_{\text{sour}}$  e  $\beta_j \simeq \beta_{\text{sour}}$ ) le correzioni applicate agli elementi della *peakmap* selezionati, uno per ciascuno dei tempi di inizio delle FFT, corrispondano tutte alla stessa frequenza, cioè quella del segnale reale (in quanto abbiamo ipotizzato *spindown* nullo). Analogamente nelle porzioni di cielo immediatamente vicine a quella di provenienza del segnale, essendo la frequenza discreta, la correzione dei segnali fornirà il più delle volte la stessa frequenza. Viceversa, più lontane sono le coordinate considerate rispetto a quelle della sorgente, più la correzione di frequenza fornirà valori diversi ed apparentemente casuali.

A questo punto interviene la mappa di Hough grazie alla quale si ottiene un conteggio di tutti i picchi nella stessa posizione di cielo con un certo *spindown*  $\dot{f}$  e con una frequenza iniziale  $f_D(t_i)$  che evolve come

$$f_D(t_i) = f_D(t_0) - \dot{f}(t_i - t_0). \quad (3.2)$$

In questo modo, se vado a studiare i candidati in base alla statistica di rivelazione, vedrò che i candidati con maggior CR saranno molto vicini e giaceranno lungo le curve di livello dell'equazione:

$$f = f_0 \left( 1 + \frac{|\vec{V}_T|}{c} \cos(\beta) \sin(\lambda - \lambda_0) \right) + \dot{f} \tau, \quad (3.3)$$

dove  $\tau$  è un parametro di tempo che corrisponde alla durata temporale del *run*.

### 3.1.1 Identificazione dei *pattern* nel *set* di candidati ottenuti

Sebbene in teoria il *pattern* descritto dall'equazione 3.3 sia facile da identificare, il procedimento non è semplice come può apparire. In assenza di rumore il punto con statistica di rivelazione più alta è quello con i parametri più vicini a quelli reali. Il rumore, tuttavia, influenza in maniera significativa la statistica di rivelazione rendendo impossibile identificare i parametri del segnale solo basandosi sul massimo valore di CR; un suo alto valore resta comunque un ottimo modo per stimare i parametri del segnale. D'altro canto appare evidente che l'andamento del CR in funzione della variazione di frequenza (e quindi degli altri parametri) segue come una distribuzione binomiale [8].

Una complicazione nell'utilizzo dei *pattern* per stimare i parametri di una sorgente corrisponde al fatto che questi giacciono su ipersuperfici tridimensionali dello spazio quadridimensionale dei parametri (infatti sono regolati dall'unica equazione (3.3)). Anche se è possibile fare alcune approssimazioni per studiare il punto di intersezione, ci sono troppi parametri liberi per poter ricostruire i segnali da semplici intersezioni.

### 3.2 Pulizia dei candidati

Piuttosto che ricercare le sorgenti attraverso lo studio dei *pattern*, si è notato che l'equazione (3.3), opportunamente impiegata, permette di ridurre il numero di candidati in modo da applicare successivamente (in maniera più veloce) la tecnica delle coincidenze. Su questo si basa l'algoritmo sviluppato.

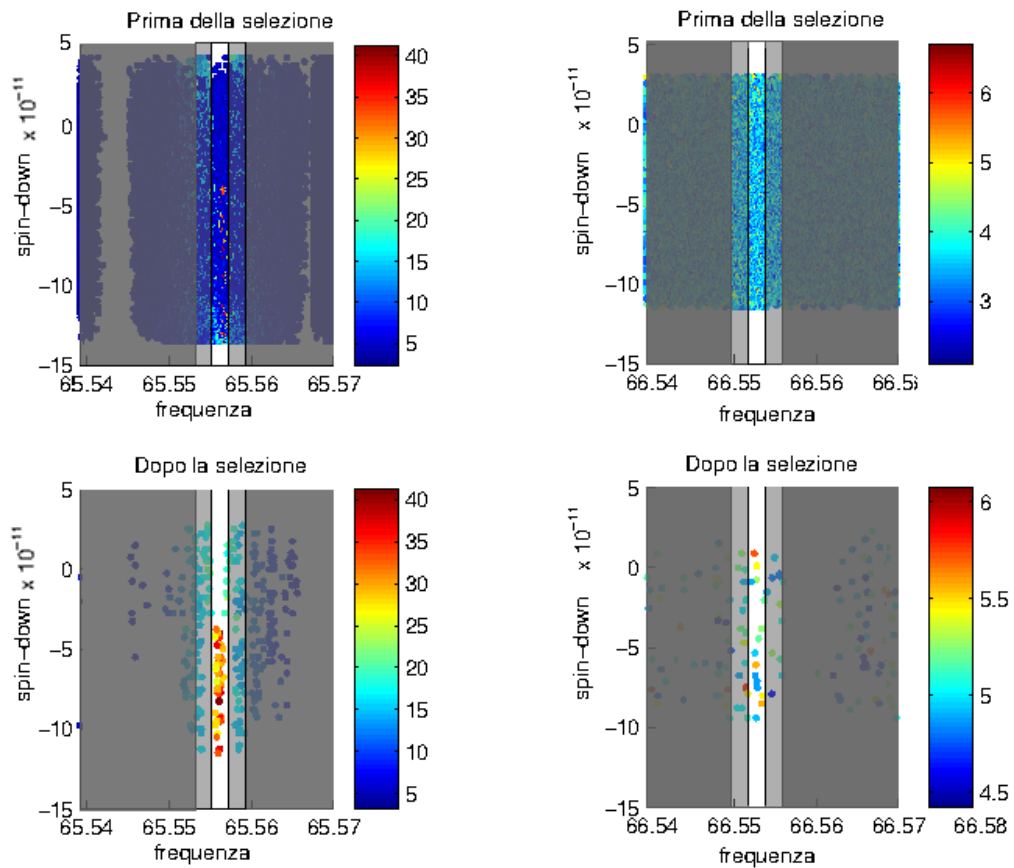
Per capire l'idea di base, supponiamo di selezionare un punto nel quadrispazio dei parametri. Come è stato detto precedentemente, se esiste una sorgente con parametri abbastanza simili a quelli del punto selezionato, nell'intorno di quel punto i candidati ad alta statistica giaceranno sulla curva descritta dall'equazione (3.3). Se invece consideriamo un punto con parametri molto diversi da qualsiasi sorgente (iniettata nei dati), quello che vedremo sarà solo rumore distribuito in maniera (almeno apparentemente) casuale. Possiamo allora valutare quale sia la statistica di rivelazione dei candidati distribuiti lungo la curva (in un intorno del punto selezionato) rispetto a quelli distribuiti lungo un'altra curva che intersechi la prima nel punto in esame (o meglio, in un intorno del punto stesso). Se riveleremo molti candidati con maggiore statistica di rivelazione sulla prima curva rispetto alla seconda, saremo in presenza di una sorgente. Viceversa, se i candidati con alta statistica sono ugualmente distribuiti lungo la prima e la seconda curva, saremo in un punto di solo rumore.

Spieghiamo ora nel dettaglio come si è implementato quanto descritto. Innanzitutto è necessario ridurre i gradi di libertà del problema che altrimenti rimarrebbe computazionalmente costoso. Una ispezione dei dati (inizialmente visiva e poi seguita da *fit*) ci ha permesso di verificare che i candidati sulla proiezione del quadrispazio  $f/\hat{f}$  giacciono sempre lungo *pattern* a forma di rette abbastanza precise (avremo in realtà forme allargate dovute da un lato agli errori sperimentali e dall'altro alla proiezione in 2 dimensioni di uno spazio quadridimensionale). Il fatto che, come si può vedere anche dalle figure 3.5 e 3.6, lo *spindown* non sia direttamente correlato con le posizioni nel cielo garantisce che si possano analizzare separatamente (con i dovuti accorgimenti) il *pattern* dovuto all'effetto Doppler e quello dovuto allo *spindown*; infatti per due parametri scorrelati la variazione di uno non incide sul *pattern* dell'altro. D'altronde, osservando invece i *pattern* indotti da  $\lambda$  e  $\beta$  sulla frequenza (figure 3.1 e 3.2) si può notare che il *pattern*, per quanto preciso, è influenzato da un parametro nascosto (ovvero l'altra coordinata celeste). Il *pattern* indotto dallo *spindown*, invece, essendo strettamente bidimensionale, si può analizzare con facilità.

Per quanto detto sopra, applichiamo l'algoritmo sopra descritto usando un *pattern* ridotto rispetto a quello quadridimensionale. Tale *pattern* sarà del tipo

$$f = f_0 + \hat{f}\tau, \quad (3.4)$$

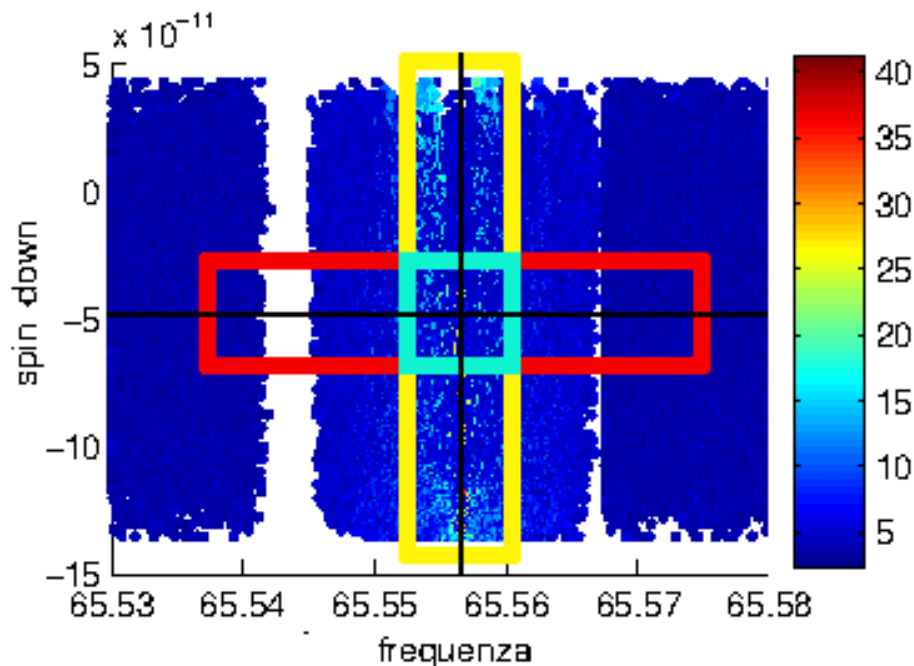
con  $\tau$  parametro con le dimensioni di un tempo.



(a) Disposizione dei candidati corrispondenti ad una sorgente nel piano frequenza/*spindown* prima e dopo aver applicato l'algoritmo di pulizia qui descritto

(b) Disposizione dei candidati di puro rumore nel piano frequenza/*spindown* prima e dopo aver applicato l'algoritmo di pulizia qui descritto.

**Figura 3.7.** Pattern ed efficacia dell'algoritmo di pulizia.



**Figura 3.8.** Esempio di selezione delle rette da valutare. Le dimensioni non sono quelle reali, ma l'immagine è a titolo esemplificativo.

L'idea sopra citata si implementa quindi secondo quanto segue: si valutano dapprima i candidati all'interno di un'area rettangolare con i lati lunghi paralleli alla retta descritta dall'equazione (3.4) e centrata sul punto scelto. Si confrontano quindi con quelli che giacciono in un rettangolo con i lati lunghi ortogonali alla primo, sempre centrato sul punto scelto. Si dovrebbe quindi valutare il coefficiente angolare della retta descritta dall'equazione (3.4), ma è abbastanza evidente che non sia significativo: sia il passo, sia i possibili valori di frequenza e *spindown* sono molto diversi. Si valuta, invece, quale porzione di spazio frequenza e *spindown* attraversino: il secondo tende ad attraversare tutti i valori possibili, mentre la frequenza varia di un infinitesimo rispetto al range di valori che può assumere (come si può vedere bene anche in figura 3.7). Questo ci spinge a riscalarle le grandezze in modo tale che, con le grandezze riscalate, la retta risulti avente un coefficiente angolare  $\tau$  quasi nullo, che esprima cioè variazione piccola o nulla di frequenza per una grande variazione di *spindown*. Il problema della scala sarà affrontato alla fine di questo paragrafo, in quanto la decisione deve essere basata sul tipo di algoritmo che vogliamo implementare.

Ricapitolando: abbiamo rettangoli con i lati lunghi a frequenza costante (che chiameremo *verticali*), nei quali troviamo tutti i candidati ad alta statistica nel caso in cui questi corrispondano a segnali, e rettangoli con i lati lunghi a *spindown* costante (che chiameremo *orizzontali*) che ci servono come controprova.

Scegliamo un valore nel nostro spazio riscalato, ovvero una cella corrispondente a uno qualunque dei valori discreti di frequenza  $f_j$  e *spindown*  $\hat{f}_k$  (in figura 3.8 rappresentata dalla cella azzurra). Prendiamo un rettangolo verticale (in figura 3.8 in giallo) centrato sulla retta di equazione  $f = f_j$  ed un rettangolo orizzontale (in figura 3.8 in rosso) centrato sulla retta di equazione  $\hat{f} = \hat{f}_k$  che contengano il punto scelto. In ciascuno di questi

rettangoli valutiamo la media dei CR dei candidati al loro interno, che chiamiamo  $CR_V$  (per la verticale) e  $CR_O$  (per l'orizzontale). Vogliamo fare in modo che quanto più  $CR_V$  è alto rispetto a  $CR_O$ , tanti più candidati nella cella azzurra si vogliono tenere. Viceversa, se  $CR_V \lesssim CR_O$ , si ipotizza che i candidati presenti siano di solo rumore e quindi si vogliono eliminare completamente. Definiamo quindi una soglia sul CR

$$CR_{\text{thr}} = m \frac{CR_O}{CR_V}, \quad (3.5)$$

dove  $m$  è il massimo valore di CR nella cella selezionata. Scarteremo quindi tutti i candidati nella cella selezionata che abbiano CR minore della soglia e terremo gli altri. In questa maniera si tende ad eliminare tutti (o quasi tutti) i candidati nel caso in cui  $CR_O^m \gtrsim CR_V^m$ , vale a dire quando non c'è una prevalenza di candidati con CR maggiore lungo la verticale. Nel caso in cui, invece,  $CR_V^m \gg CR_O^m$ , vale a dire quando consideriamo di avere trovato i candidati generati da una sorgente, si terranno solo quelli più significativi.

Questo procedimento viene iterato per tutti i valori di  $j$  e  $k$  dettati dalla discretizzazione dello spazio  $f/\dot{f}$ .

Questo metodo tende a ridurre notevolmente il numero di candidati in esame, passando da circa  $10^8$  (rispettivamente 187 855 700 e 187 117 000 candidati per VSR2 e VSR4) a circa  $10^5$  (rispettivamente 753 109 e 564 131 candidati), con una percentuale di dati esclusi del 99,65%.

Nelle figure 3.7 si vede l'effetto della scrematura su un *set* di candidati associabili ad una sorgente e su un altro contenente candidati associabili a solo rumore.

### 3.2.1 Dimensione delle celle da analizzare

Ci poniamo ora il problema della scelta della dimensione delle celle da usare per l'analisi descritta. L'idea di utilizzare la discretizzazione scelta nel capitolo 2 funziona solo per lo *spindown*, mentre tale scelta non si può applicare per la frequenza: è necessario infatti che le celle siano abbastanza larghe da contenere tutti i candidati generati da un segnale, qualora questo sia presente.

Empiricamente si vede che la scelta migliore è quella di usare come larghezza metà della variazione Doppler massima. Infatti i candidati con maggior CR sono situati nello spazio in coordinate eclittiche con posizione molto vicina a quella vera, inoltre la variazione di frequenza dovuta allo *spindown* è tale da far sì che la larghezza scelta sia appropriata. Tale larghezza risulta essere pari a  $\Delta f = f_j 10^{-4}$ , con  $f_j$  frequenza in esame (centro della cella azzurra in figura 3.8). Ricordando che i dati sono raccolti in matrici ciascuna da 10 Hz, come detto in sezione 2.3, per semplicità di applicazione dell'algoritmo, la discretizzazione per ogni matrice è calcolata attraverso la formula  $\Delta f = f_{\text{ini}} 10^{-4}$ , dove  $f_{\text{ini}}$  è la frequenza minima dell'intervallo, vale a dire a passo costante per ogni intervallo di 10 Hz.

È poi necessario scegliere la lunghezza dei rettangoli orizzontale e verticale (rispettivamente rosso e giallo in figura 3.8). Visto che si vuole ridurre il più possibile numero di candidati, si pone un segmento sufficientemente piccolo da non venire influenzato da picchi "lontani", ma sufficientemente grande per fare statistica. Si è scelto di considerare per entrambi i rettangoli 11 celle centrate su quella in analisi (vale a dire 5 celle da un lato ed altrettante dall'altro, come mostrato in figura 3.9a).

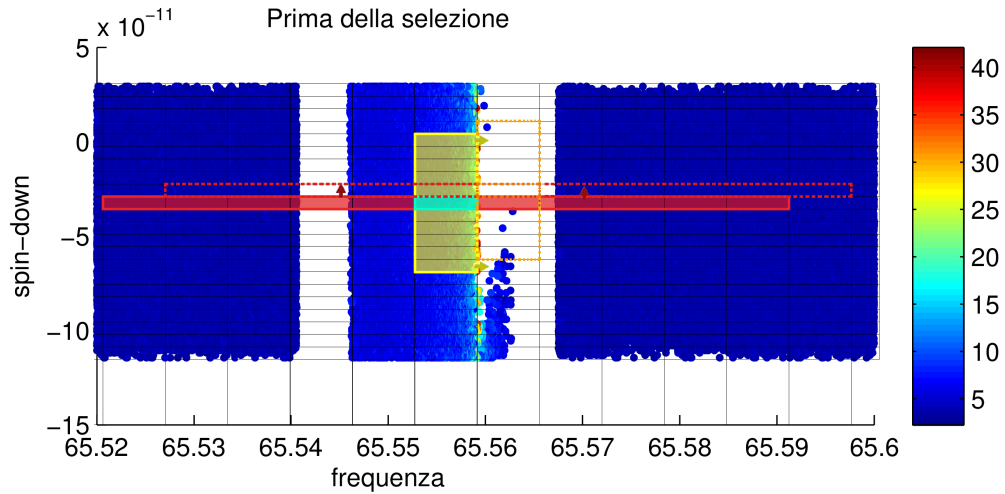


Questa suddivisione, da sola, non è sufficiente. Si pone infatti il rischio che i candidati con alto CR, capitando sul bordo di una cella, non siano completamente inclusi in un rettangolo verticale pregiudicando così il funzionamento dell'algoritmo; in questi casi (come si può osservare in figura 3.9a) il rettangolo verticale, pur spostandosi, conterrà ogni volta solo una parte della banda ad alto CR. Per eliminare questo problema di bordo, si deve evitare di muoversi lungo l'asse della frequenza per passi interi; avendo definito correttamente la dimensione dei rettangoli e mantenendola comunque come sopra descritto, muoversi per passi frazionati permetterà di trovare sempre una condizione in cui la sorgente sia interamente contenuta nell'area di analisi. Il passo verrà ridotto di un fattore 3 per una questione di simmetria, triplicando di conseguenza il numero  $j$  dei passi in frequenza; questo ha a tutti gli effetti creato delle sotto-celle con larghezza in frequenza  $\Delta f/3$  e dimensione in *spindown* invariata. In ognuno dei passi della scrematura dei candidati, completata l'analisi e la determinazione della soglia come descritto dall'equazione (3.5), anziché selezionare i candidati nell'intera cella di analisi, lo si farà solo all'interno della sua sotto-cella centrale (vedi figure 3.9b).

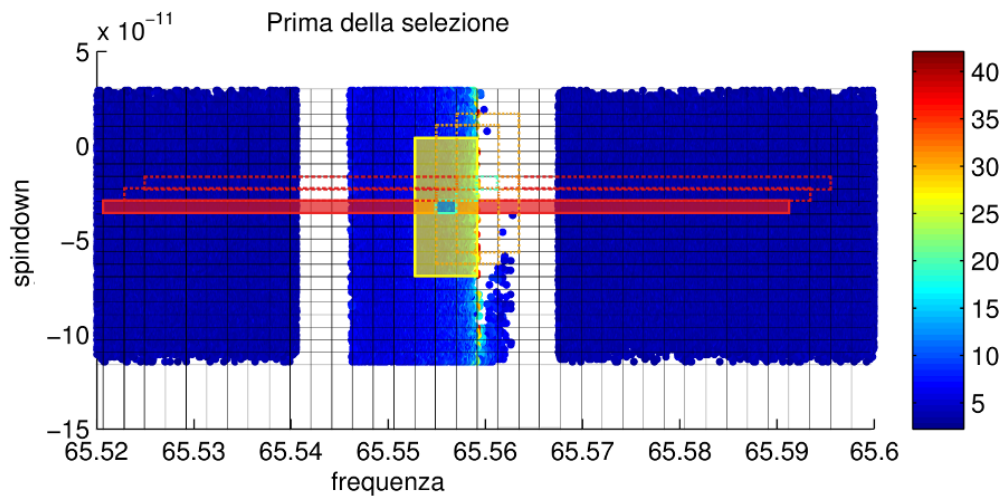
### 3.2.2 Margini di miglioramento dell'algoritmo

L'algoritmo appena descritto, sebbene si sia mostrato molto efficace, ha anche fatto trasparire un limite in alcuni casi particolari. Quando una serie di candidati di rumore con alta statistica di rivelazione sono abbastanza vicini a quelli prodotti da una sorgente c'è il rischio che non vengano esclusi. Questo avviene perché il segmento verticale in analisi include nel suo bordo alcuni candidati relativi alla sorgente che, aumentando la media verticale rispetto a quella orizzontale, diminuiscono il valore di soglia. Sebbene non sia un limite per l'efficacia dell'algoritmo, riuscire a risolvere questo problema potrebbe ridurre ulteriormente il tempo di calcolo e le probabilità di falso allarme delle analisi successive. Si investigheranno quindi metodi per mitigare questo effetto.

Un altro limite dell'algoritmo presentato è dovuto ad un effetto di bordo. Poiché i dati sono stati immagazzinati in matrici contenenti 10 Hz ciascuna, se si fa l'analisi solo sulle singole matrici, i candidati più al bordo avranno una media fatta su un rettangolo orizzontale più corto rispetto agli altri. Un metodo per risolvere questo problema è quello di aggiungere ad ogni matrice un certo numero di candidati della matrice precedente e di quella successiva. Un modo molto conservativo per aumentare le dimensioni di queste matrici eliminando il problema è quello di aggiungere a destra ed a sinistra dati inclusi nella lunghezza di un rettangolo orizzontale. Ad esempio: alla matrice 60 – 70 Hz aggiungeremo  $\Delta f_{11} = 0,03$  Hz a sinistra di 60 Hz ed a destra di 70 Hz. Chiaramente questo non risolve il problema nei bordi in frequenza del *set* di dati.



(a) Senza sovrarisoluzione: la cella su cui si applica la selezione è quella centrale. Si può osservare come i candidati ad alto CR, capitando sul bordo dell'intervallo di analizzare, non diano contributo massimo sulla media e, quindi, sulla selezione dei candidati della retta stessa.



(b) Con sovrarisoluzione: la cella su cui si applica la selezione è quella centrale. Si può osservare come quando si applica selezione sulla retta, tutta la retta venga inclusa nella media, risolvendo il problema di bordo.

**Figura 3.9.** Scelta delle celle per l'algoritmo di selezione.

### 3.3 Clustering dei candidati

Il *clustering* che viene eseguito per lo studio successivo dei candidati è molto diverso da quello definito in precedenza per la *pipeline* (vedi sezione 2.3). Si cerca infatti di raggruppare tutti i candidati compatibili con una singola sorgente, piuttosto che raggruppare quelli molto vicini. In questo senso, la strategia usata (per ognuno dei due *set* di dati) è la seguente:

- Si seleziona il candidato con massimo CR tra quelli del *set* di dati in studio.
- Si seleziona un intorno in frequenza di tale candidato che contenga tutti i candidati compatibili con una sorgente in quel punto. Il semi-intervallo scelto è quello della correzione Doppler  $\Delta f = f_0 10^{-4}$ , con  $f_0$  frequenza del punto di massimo.
- Si genera un *cluster* che raccoglie i candidati così selezionati, che vengono quindi rimossi dal *set* dei candidati in esame.
- Si itera il procedimento sul *set* dei candidati fino a che sono stati tutti classificati nei *cluster*.

Questa procedura raggruppa i candidati ottenuti dalla pulizia in 12327 *cluster* per il VSR2 e 11476 per il VSR4; di tale *cluster* vengono immediatamente eliminati i *cluster* che non contengano almeno 3 candidati (ritenendoli non interessanti per lo studio). Resteranno quindi il 95% dei *cluster* di partenza.

Si procede infine con un'ulteriore scrematura dei *cluster*. L'idea è che i *cluster* che contengono candidati compatibili con una certa sorgente devono avere il CR massimo più alto dei *cluster* contenenti residui di rumori. Pertanto, si ordinano i *cluster* in frequenza e, per ognuno di essi, si seleziona un *set* di *cluster* contenente esso stesso ed i 4 intorno a lui (2 prima e 2 dopo). Il *cluster* sarà scartato qualora il massimo valore di CR qui trovato sia minore o uguale della mediana dei massimi di CR dei *cluster* nel *set*.

Questa procedura riduce il numero di *cluster* del 60 %.

### 3.4 Analisi dei *Cluster* e stima dei parametri delle sorgenti recuperate

A questo punto i *cluster* che abbiamo ottenuto verranno utilizzati per studiare i parametri delle sorgenti. Ricordiamo che prima di effettuare questa procedura di stima, poiché stiamo lavorando con prese dati molto distanti nel tempo, è necessario ricorreggere la frequenza di ciascun candidato di VSR2 aggiungendo alla sua frequenza quella variazione indotta dal suo *spindown*; questa variazione sarà  $f \Delta t_{\text{VSR4-VSR2}}$ .

Vogliamo quindi verificare quali *cluster* nei due *set* di dati siano compatibili tra loro: definiamo allora una distanza minima in frequenza  $d_{\text{fr}}$  per cui due *cluster* si considerino in coincidenza. Perché due *cluster* siano in coincidenza, dovranno sovrapporsi a meno di un fattore  $d_{\text{fr}}$ . Pertanto si impone la condizione secondo cui il massimo dei minimi di frequenza dei due *cluster* (sottratto dell'eventuale  $d_{\text{fr}}$ ) sia minore del minimo dei massimi di frequenza dei due *cluster*.

Una volta ottenuta la matrice delle possibili coincidenze tra i *cluster* di VSR2 e VSR4, scegliamo quali di queste coppie siano effettivamente compatibili con potenziali sorgenti.

Ci si aspetta infatti che ogni *cluster* sia generato al più da una sorgente, quindi ogni *cluster* deve avere al più un "compagno". Per ogni *cluster* di ogni *run*, allora, scegliamo tra le coincidenze possibili quella il cui compagno abbia CR maggiore. Questo procedimento riduce il numero di coincidenze da 7363 a 2777.

Definita allora la distanza descritta dall'equazione (2.17), per ogni candidato del primo cluster della coppia, si valuta la distanza con ogni candidato della seconda coppia. La minore di queste distanze ci indicherà quali candidati siano in coincidenza. Considerando che un alto CR indica un'alta probabilità che i parametri siano quelli corretti, ricaviamo i parametri della sorgente calcolandoli mediante la media dei parametri dei candidati in coincidenza pesata mediante il loro CR; detto  $x_i$  generico parametro dell' $i$ -esimo candidato coincidente (con  $i = 1, 2$ ) e  $CR_i$  il rispettivo *Critical Ratio*, il parametro ricavato sarà:

$$x_{\text{det}} = \frac{x_1 CR_1 + x_2 CR_2}{CR_1 + CR_2}. \quad (3.6)$$

A questo punto è utile definire uno o più parametri stimatori (una sorta di pesi) che valutino quanto sia verosimile che una sorgente trovata non sia un artefatto di qualche genere. Per valutare questo peso dobbiamo però fare una considerazione. La distribuzione attesa del CR sull'ipersuperficie del quadrispazio dei parametri deve necessariamente essere una Bernoulliana. Questo deriva da come è stato ricavato il CR. Ci aspettiamo quindi che un segnale proveniente da una sorgente produrrà una sorta di campana con un picco più o meno alto mentre un rumore residuo dovrebbe essere distribuito in maniera più casuale.

Risulta pertanto ragionevole creare un peso stimatore con i parametri della curva (altezza e varianza). Il problema è che le curve con pochi candidati vengono di solito valutate meglio delle curve con più candidati, cosa che pregiudica la bontà dello stimatore, quindi è necessario inserire nello stimatore anche il numero di candidati.

Si è visto empiricamente che dei buoni stimatori sono:

$$P_1 = -\sigma_1^2 \sigma_2^2 K_1 K_2 \quad (3.7)$$

$$P_2 = \frac{P_1}{M_1 M_2}, \quad (3.8)$$

con  $\sigma_l^2$  scarto quadratico medio,  $K_l$  numero di candidati e  $M_l$  massimo CR del  $l$ -esimo *cluster*.

Ottenuti questi due stimatori facciamo un'ulteriore scrematura. Una supposizione che potremmo fare, ad esempio, è che non ci aspettiamo di trovare due sorgenti con una frequenza uguale a meno di un fattore minore di 0,05 Hz<sup>1</sup>; per questo, trovata una sorgente, escludiamo tutte le altre che abbiano frequenza entro 0,05 Hz da quella trovata e che abbiano  $P_2$  minore di quello della sorgente selezionata.

Infine mettiamo una soglia sui pesi ed eliminiamo le sorgenti con peso inferiore. Si verifica in maniera empirica che delle soglie ragionevoli sono  $10^8$  e  $10^6$  rispettivamente su  $P_1$  e  $P_2$ .

<sup>1</sup>Questa scelta è stata fatta supponendo che non ci sia mai più di una sorgente per ogni intervallo di 0,1 Hz; sebbene per il nostro caso questa scelta sia valida (data la conoscenza a priori delle sorgenti iniettate), nel caso generale invece, per definire tale soglia è opportuno valutare la sensibilità dello strumento specifico in uso per la rivelazione.

## 3.5 Risultati

Un primo risultato importante è che, durante il primo algoritmo di pulizia descritto in sezione 3.2, è stata preservata la totalità dei candidati associabili alle sorgenti. Per verificarlo è stata effettuata un'analisi dei candidati ad alto CR residui dopo l'algoritmo di pulizia confrontandoli con i parametri delle sorgenti iniettate e cercandone le compatibilità. Questa analisi è stata utile per verificare che il metodo di rimozione del rumore non rimuovesse anche candidati significativi. Questo risultato è già importante di per sé perché dà un'indicazione del fatto che l'algoritmo lavora nella direzione giusta. Infatti, anche indipendentemente dai risultati della seconda parte dell'algoritmo (*clustering* e recupero dei parametri), riuscire a eseguire una prima scrematura così significativa dei dati permetterà di rendere molto più veloce l'algoritmo di *clustering* e coincidenze già in uso dal gruppo.

La seconda fase dell'algoritmo descritto in questa dissertazione è quella di *clustering* dei candidati e recupero dei parametri. Ricordiamo che è necessario che l'algoritmo trovi con alta precisione la frequenza e la posizione nel cielo, in modo da riuscire ad individuare la sorgente con il successivo *follow up* che utilizzerà in modo più importante le coordinate eclittiche. Dalla tabella in appendice B.2 si può subito notare che i dati recuperati con frequenza compatibile (entro 0,015 Hz) con quella delle sorgenti sono 226 contro 272, vale a dire l'83%. Una parte di questi, tuttavia, nell'analisi dei parametri ha rivelato una posizione nel cielo non coerente con quella della sorgente, mentre 161 sono state individuate con buona precisione. Abbiamo ottenuto quindi in maniera piuttosto precisa che il 60% delle sorgenti sono state comunque recuperate. Notare che in questa analisi si sono usate solamente quelle sorgenti generalmente considerate rivelabili, ovvero quelle con SNR pari o superiore a 3.

Per fare un paragone, sugli stessi dati, neppure per l'algoritmo originale è stato possibile individuare alcune sorgenti (32 delle 272), che sono poi state recuperate utilizzando una variante dello stesso decisamente più pesante a livello computazionale.

Il vantaggio notevole dell'algoritmo qui presentato è che i risultati sono stati ottenuti in 4 ore e mezza (15973 secondi) di elaborazione rispetto ai tempi dell'algoritmo precedente che ha impiegato più di 5 giorni. Pertanto si è ottenuta una riduzione nel tempo di calcolo del 96%. L'elaborazione di entrambi gli algoritmi è avvenuta sulla medesima macchina con le stesse condizioni di CPU.



## Capitolo 4

# Conclusioni

Come si è visto in sezione 3.5, la parte di scrematura dei candidati non solo si è mostrata molto efficiente (eliminando il 99,65% dei candidati senza rimuovere alcuna sorgente), ma anche molto più veloce del *clustering* proposto in precedenza. Implementare quindi questa tecnica a monte del *clustering* potrebbe portare ad un deciso risparmio di tempo oltre che, probabilmente, ad un rischio molto più basso di falsi allarmi.

Oltre a questi risultati ottenuti, l'algoritmo presenta comunque anche possibilità di evoluzione e di miglioramento, su cui è però necessaria un'indagine e una valutazione più approfondita. La ricerca per la scrematura, infatti, si è svolta su un *pattern* ridotto (proiettato cioè da uno spazio quadridimensionale su uno bidimensionale) e basato sullo *spindown*. Questo è stato possibile perché l'effetto Doppler e lo *spindown* che creano il *pattern* sono scorrelati. Può valere la pena, in un eventuale studio successivo, di cercare il modo di applicare una seconda soglia per la selezione dei candidati analoga a quella qui descritta, ma per il *pattern* legato all'effetto Doppler. Questo potrebbe ridurre ulteriormente il numero di candidati. Per poter implementare, però, questa nuova soglia è necessario studiare il parametro  $\lambda_0$  che compare nell'equazione 3.1 e che dovrebbe essere un termine dipendente dal tempo di inizio e dal tempo di fine della presa dati. L'analisi effettuata con il presente studio si è focalizzata sul *pattern* dovuto allo *spindown* in quanto appariva il più efficiente ed immediato (la valutazione è stata fatta sullo studio empirico dei *pattern*).

Per quanto riguarda la procedura di *clustering* e recupero di parametri, il discorso è più ampio. Si è voluta cercare una strada alternativa a quella già esistente che, per recuperare tutte le sorgenti, richiedeva un costo computazionale estremamente elevato. Il fatto che l'algoritmo proposto abbia recuperato il 60 % dei segnali con buona precisione in un tempo significativamente inferiore, è un'indicazione che la direzione intrapresa è valida e promettente. Ricordiamo che l'utilizzo dell'algoritmo qui presentato ha permesso ridurre i tempi di calcolo del 96% rispetto all'impiego dell'algoritmo originale [2].

Il numero di candidati persi non è tuttavia irrilevante, indicando quindi che bisogna approfondire ulteriormente questo approccio per poter ottenere un risultato più vicino a quanto sperato. Gli elementi su cui lavorare sono legati al fatto che presumibilmente esiste ancora una grande quantità di rumore presente dopo la scrematura. Si ritiene che si sarebbero potuti ottenere risultati migliori dopo una pulizia ancora più efficace di quella ottenuta con il nuovo algoritmo. Infatti è possibile che, per esempio, per cercare la minima distanza si debba prima ridurre il numero dei candidati al solo picco di CR.

Per questo motivo, dopo la costruzione dei *cluster* e la ricerca di quelli in coincidenza, vale la pena studiare come scremare candidati nei *cluster* coincidenti per poi valutare la distanza tra i punti come descritto in sezione 3.4.

Il risultato nel complesso è comunque positivo perché mette a disposizione un sistema che è in grado di discernere una quota significativa dei segnali, permettendo di compiere successivamente analisi più approfondite su un sottoinsieme ridotto delle frequenze, riducendone quindi drasticamente l'impatto computazionale.



# Appendice A

## Script

### A.1 Pulizia dei dati

```
function cleaned=data_cleaning(cand,sddnat,varargin)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Questa funzione si occupa di studiare le matrici dei candidati
% (studiata su matrici del tipo VSR2_1_060070_ref) al fine di
% rimuovere molti dei candidati non associabili a sorgenti. Al
% momento è stato testato sui VSR2 e VSR4 con le sorgenti
% iniettate da Sabrina.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ARGOMENTI IN INPUT %%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% OBBLIGATORI %%%%%%%%%
%
% La funzione necessita di una matrice cand(Nx6) di N candidati
% del tipo VSR#_1_#####_ref composta da (freq, #, #, sd, #, CR)
% gli altri parametri della matrice non sono utilizzati (i.e.
% potrebbe essere maggiore di 6).
%
% La funzione necessita anche dello step minimo in spindown,
% sddnat.
%
%
%
%
% Gli argomenti opzionali sono sempre in coppie del tipo:
% ..., 'tipo di argomento', valore, ...
%
% Gli argomenti opzionali sono:
```

```

% 'save',filename-> salva i risultati su file;
% filename e' il nome del file.mat incluso di destinazione.
% 'dstep', valore-> larghezza dello step lasco in frequenza.
% Di standard è fr/10^4. (Vedi documentazione).
%'sdlenght', valore -> lunghezza del rettangolo a frequenza
% costante.
%'frlenght', valore -> lunghezza del rettangolo a spindown
% costante.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Di Giuseppe Intini - intinigiuseppe@gmail.com -
Versione Maggio 2016
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%verifica l'esistenza degli argomenti opzionali e li elabora.
%Inizializza gli argomenti iniziali.

if ~exist('varargin','var')
varargin=[];
end

if mod(length(varargin),2)==1
display('Attenzione, vargin dispari!!! \n La seguente variabile non verrà...
...considerata:')
display(varargin{length(varargin)})
end

fr=min(cand(:,1));

frou= max(cand(:,1));

span=frou-frin;

saving=0;

fsteps=floor(3*span*10^4/fr);

sdlenght=5;

frlenght=5;

```

```
V=floor(length(varargin)/2);

for i=1:V

selected=varargin{2*i};

switch varargin{2*i-1}

case 'save'

saving=1;

filename=selected;

case 'fsteps'

fstep=floor(3*span/selected);

case 'sdlenght'

sdlenght=floor(selected);

case 'frlenght'

frlenght=floor(selected*3);

otherwise

display('Unknown varargin argument:')

display(varargin{2*i-1})

display('Argument excluded')

end

end

end

% Inizializza le funzioni di calcolo delle posizioni nella
% griglia. Alcune sono inutili nella funzione di per sé ma
% sono controlli in caso si
```

```
%decida di intervenire a livello debug.

% Per la frequenza

info(1)=length(cand);

fr_sd.fr=@(index)[fr+(index-1)*span/fsteps, fr+index*span/fsteps];

fr_sd.frin=@(freq)max(floor((freq-fr).*fsteps/(span)*(1+10^-12))+1,1);

% Per lo spindown

s=floor(min(cand(:,4))/sddnat)*sddnat;

fr_sd.sd=@(index) [s+(index-1)*sddnat, s+index*sddnat];

fr_sd.sdin=@(sd) floor((sd-s)*(1+10^-24)/sddnat)+1;

Sstep=fr_sd.sdin(max(cand(:,4))); %numero di passi in spindown

%Inizializza la griglia.

for i=1:(fsteps+1)

for j=1:Sstep

fr_sd.table(i,j).cand=[]; % "Casella" i-esima in frequenza
% e j-esima in spindown

end

end

N=length(cand);
```

```

% Organizza i candidati in tabelle. Questo passaggio è un po' pesante
% perché allarga le matrici.
for n=1:N
i=fr_sd.frin(cand(n,1));
j=fr_sd.sdin(cand(n,4));

fr_sd.table(i,j).cand=[fr_sd.table(i,j).cand; cand(n,:)];
end

cleaned=[];
F=floor((frlenght-1)/2);
S=floor((sdlenght-1)/2);

% Applicazione del metodo vero e proprio. NB: per minimizzare la
% complessità c'è un unico ciclo che fa tutte le caselle in spindown
% per poi avanzare di 1 in frequenza e ricominciare.

for n=1:((fsteps+1)*Sstep)
i=1+floor((n-1)/Sstep); %calcolo il numero della cella in frequenza.
j=mod(n-1,Sstep)+1; %calcolo il numero della cella in spindown.
t=fr_sd.table(i,j).cand;
if isempty(t)
continue
end

cellf=max(i+(-1:+1),1); %Larghezza cella in frequenza. La cella di
% partenza è sovrarisoluta.

cellf=min(cellf,(fsteps+1)); %problemi di bordo
cellf=unique(cellf); %problemi di bordo
Tf=max(i+(-F:+F),1); %Lunghezza del rettangolo a spindown costante
Tf=min(Tf,(fsteps+1));
Tf=unique(Tf);

Tsd=max(j+(-S:+S),1); %Lunghezza del rettangolo a frequenza costante
Tsd=min(Tsd,Sstep);
Tsd=unique(Tsd);

%Media del rettangolo a spindown costante
c=[];
for l=Tf
if ~isempty(fr_sd.table(l,j).cand)
c=[c;fr_sd.table(l,j).cand(:,6)];
end
end
Mo=mean(c);

```

```

%Media del rettangolo a frequenza costante
c=[];
for l=cellf
for h=Tsd
if ~isempty(fr_sd.table(l,h).cand)
c=[c;fr_sd.table(l,h).cand(:,6)];
end
end
end
Mv=mean(c);

m=max(t(:,6));
ii=find(t(:,6)>(m*Mo/Mv));
cleaned=[cleaned;t(ii,:)];

end

if saving==1
save(filename,'cleaned')
end

end

```

## A.2 Creazione dei cluster

```

function clust=clustercreation(cand)

% Questa funzione si occupa di raggruppare i candidati formando
% cluster in frequenza.
% L'algorithmo cerca un picco, ne sceglie un intorno e ne crea un
% cluster.
%
% % % % % % % % % % ARGOMENTI IN INPUT % % % % % % % % % %
%
% % % % % % % % % % % OBBLIGATORI % % % % % % % % % % %
%
% La funzione necessita di una matrice cand(Nx6) di N candidati del tipo VSR#_1_#####
% gli altri parametri della matrice non sono utilizzati (i.e. potrebbe essere maggiore
%
%
%
%
% Gli argomenti opzionali sono sempre in coppie del tipo: ..., 'tipo di argomento', va
%
%
% Gli argomenti opzionali sono:

```

```
% 'selection', 'fr'
% -> impone una soglia sulla frequenza intorno al massimo di CR.
% 'selection', 'CR'
% -> impone una soglia sul CR rispetto al picco.
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Di Giuseppe Intini - intinigiuseppe@gmail.com - Versione Maggio 2016
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%verifica l'esistenza degli argomenti opzionali e li elabora.
%Inizializza gli argomenti iniziali.

if ~exist('varargin','var')

varargin=[];

end

if mod(length(varargin),2)==1

display('Attenzione, vargin dispari!!! \n...
... La seguente variabile non verrà considerata:')

display(varargin{length(varargin)})

end

soglia=0;

V=floor(length(varargin)/2);

for i=1:V

selected=varargin{2*i};

switch varargin{2*i-1}

case 'selection'

if selected=='fr'
```

```
soglia=1;

elseif selected=='CR'

soglia==2;

end

otherwise

display('Unknown varargin argument:')

display(varargin{2*i-1})

display('Argument excluded')

end

end

exam=cand;

clust=[];

while ~isempty(exam)

[~,ind]=max(exam(:,6));

f0=exam(ind(1),1);

kk=find(abs(exam(:,1)-exam(ind(1),1))<f0*10^-4);

if soglia==0;

ii=kk;

elseif soglia==1

ii=find(abs(exam(:,1)-exam(ind(1),1))<f0*10^-6);

elseif soglia==2

ii=find(exam(kk,6)>exam(ind(1),6)*0.36);
```



```
end

clust(length(clust)+1).cand=exam(ii,:);
clust(length(clust)).fr=exam(ind(1),1);
clust(length(clust)).lam=exam(ind(1),2);
clust(length(clust)).bet=exam(ind(1),3);
clust(length(clust)).sd=exam(ind(1),4);
exam(kk,:)=[];
end

end
```

### A.3 Recupero dei parametri delle sorgenti

```
function [R,info]=source_recovery(fr,varargin)

if ~exist('varargin','var')
varargin=[];
end

if mod(length(varargin),2)==1

display('Attenzione, vargin dispari!!! \n...
...La seguente variabile non verrà considerata:')

display(varargin{length(varargin)})

end

folder=[];
```

```
saving=0;

dist=0.01;

V=floor(length(varargin)/2);

for i=1:V

selected=varargin{2*i};

switch varargin{2*i-1}

case 'folder'

folder=selected;

if folder(length(folder))~='/'

folder(length(folder)+1)='/'

end

case 'save'

saving=1;

filename=selected;

case 'dist'

dist=selected;

otherwise

display('Unknown varargin argument:')

display(varargin{2*i-1})

display('Argument excluded')

end

end
```

```
frdnat(2)=1.2207e-04;

frdnat(4)=1.2207e-04;

sddnat(2)=7.6270e-12;

sddnat(4)=1.5016e-11;

for RUN=2:2:4

string=sprintf('%sVSR%d_1_%03d%03d_ref',folder,RUN,fr,frou);

load(string)

string=sprintf('VSR%d_1_%03d%03d_ref.cand;',RUN,fr,frou);

eval(['cand=' string])

info(RUN/2).cand(1)=length(cand);

cleaned=data_cleaning(cand,sddnat(RUN))

eval(sprintf('cand%d=cand;',RUN))

info(RUN/2).cand(2)=length(cleaned);

end

run2=cand2;

run4=cand4;
```

```
clust=clustercreation(run2);

info(1).clust(2)=length(clust);

clust=clustercreation(run4);

info(2).clust(2)=length(clust2);

ii=find(abs([clust(:).n])<3);
clust(ii)=[];

ii=find(abs([clust2(:).n])<3);
clust2(ii)=[];

info(1).clust(3)=length(clust);
info(2).clust(3)=length(clust);

info(1).cand(3)=sum([clust(:).n]);
info(2).cand(3)=sum([clust2(:).n]);

%Procedura di pulizia dei cluster.

[~,s]=sort([clust(:).fr]);
c=clust(s);

[~,s]=sort([clust2(:).fr]);
c2=clust2(s);

clust=[];
```

```
clust2=[];

for i=1:length(c)

z=i+(-2:2);

z=min(z,length(c));

z=max(z,1);

z=unique(z);

if c(i).M>median([c(z).M])

clust=[clust,c(i)];

end

end

for i=1:length(c2)

z=i+(-2:2);

z=min(z,length(c2));

z=max(z,1);

z=unique(z);

if c2(i).M>median([c2(z).M])

clust2=[clust2,c2(i)];

end

end

info(1).clust(4)=length(clust);

info(2).clust(4)=length(clust);

info(1).cand(4)=sum([clust(:).n]);
```

```
info(2).cand(4)=sum([clust2(:).n]);

match=[];

for j=1:length(clust2)
for i=1:length(clust)
M=min(clust(i).frmax, clust2(j).frmax);
m=max(clust(i).frmin, clust2(j).frmin);
if M>m-dist
match=[match; i,j,clust(i).M,clust2(j).M];
end
end
%j*100/length(clust2)
end

info(3).match(1)=length(match);

old=match;
match=[];
for j=1:length(clust)
ii=find(old(:,1)==j);
if isempty(ii)
continue
end
[~,k]=max(old(ii,4));
match=[match; old(ii(k),:)];
```

```
end

old=match;

match=[];

for j=1:length(clust2)

ii=find(old(:,2)==j);

if isempty(ii)

continue

end

[~,k]=max(old(ii,3));

match=[match; old(ii(k),:)];

end

info(3).match(2)=length(match);

for i=1:length(clust)

clust(i).normcand=clust(i).cand;

clust(i).normcand(:,1)=clust(i).normcand(:,1)/frdnat(RUN);

clust(i).normcand(:,2)=...
... clust(i).normcand(:,2)./clust(i).normcand(:,7);

clust(i).normcand(:,3)=...
...clust(i).normcand(:,3)./clust(i).normcand(:,8);

clust(i).normcand(:,4)=clust(i).normcand(:,4)/sddnat(RUN);

end

for i=1:length(clust2)
```

```

clust2(i).normcand=clust2(i).cand;

clust2(i).normcand(:,1)=clust2(i).normcand(:,1)/frdnat(RUN);

clust2(i).normcand(:,2)=...
...clust2(i).normcand(:,2)./clust2(i).normcand(:,7);

clust2(i).normcand(:,3)=...
...clust2(i).normcand(:,3)./clust2(i).normcand(:,8);

clust2(i).normcand(:,4)=clust2(i).normcand(:,4)/sddnat(RUN);

end

x=[[clust(:).variance]; [clust(:).n]; [clust(:).fr];...
... [clust(:).M]; [clust(:).lam];[clust(:).bet];[clust(:).sd]]';

y=[[clust2(:).variance]; [clust2(:).n]; [clust2(:).fr];...
... [clust2(:).M]; [clust2(:).lam];[clust2(:).bet];[clust2(:).sd]]';

result=[x(match(:,1),:), y(match(:,2),:)]];

[P,s]=sort(-result(:,4).*result(:,11).*result(:,2).*result(:,9)...
.../(result(:,1).*result(:,8)));

result=result(s,:);

result=result(:, [3,10,5,12,6,13,7,14,1,8,2,9,4,11]);

index=match(s,:);

ii=1:(i-1);

R=sort(result,1);

source=[];

for i=1:length(result);

a=index(i,1);

```



```
b=index(i,2);

cand=clust(a).normcand;

cand2=clust2(b).normcand;

table=zeros(length(cand(:,1)),length(cand2(:,1)));

for j=1:length(cand(:,1))

table(j,:)=(...

(cand(j,1)-cand2(:,1)).^2+...

(cand(j,2)-cand2(:,2)).^2+...

(cand(j,3)-cand2(:,3)).^2+...

(cand(j,4)-cand2(:,4)).^2 ...

).^0.5;

end

[d,j,k]=minmin(table);

cand=clust(a).cand;

cand2=clust2(b).cand;

source(i,:)=[cand(j,[1:4,6]),cand2(k,[1:4,6]),d];

end

S=[];

for i=1:4

S(:,i)=(source(:,i).*source(:,5)+source(:,5+i).*source(:,10))...

.../(source(:,5)+source(:,10));

end

S(:,5)=source(:,5).*source(:,10);
```

```
R=S;

info(3).S(1)=length(S);

R=[R,-P];

for i=length(R):-1:1

    ii=1:(i-1);

    jj=find(abs(R(i,1)-R(ii,1))<0.05);

    if ~isempty(jj)

        R(i,:)=[];

    end

end

info(3).S(2)=length(R);

ii=find(R(:,6)<10^8);

R(ii,:)=[];

ii=find(R(:,6)./R(:,5)<10^6);

R(ii,:)=[];

info(3).S(3)=length(R);

if saving==1

    save(filename,'R','info')
```

end

end



## Appendice B

### Tabelle Dati

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
20,042	-53,99	-13,594	-6,52E-11	10,884	
20,256	-112,16	17,586	-7,38E-11	15,149	
20,472	66,859	-37,871	-1,79E-11	12,36	
20,689	-176,39	44,063	-6,55E-11	8,6386	
20,904	-59,9	44,746	-8,11E-12	4,1542	1
21,119	-136,15	16,637	-7,45E-12	1,6861	
21,335	7,272	-45,704	-1,65E-11	3,1428	2
21,551	-71,295	-74,982	-1,13E-11	30,264	
21,767	119,66	-60,886	-9,03E-11	14,742	
21,983	-38,277	8,988	-5,85E-11	72,692	3
22,199	105,33	-21,903	-7,94E-11	1,2568	
22,413	-7,1333	-17,046	9,28E-12	0,24837	
22,63	-116,9	4,913	-2,36E-11	1,3023	
22,844	24,557	-55,425	-3,64E-11	0,78806	
23,062	9,652	60,354	1,06E-12	0,63724	
23,277	174,59	14,963	-7,09E-11	0,43998	
23,492	57,121	-22,487	-1,00E-10	0,6815	
23,709	119,74	-8,1215	-3,29E-11	2,2749	
23,925	141,71	-60,536	-5,86E-11	2,6815	
24,141	31,633	-46,006	-6,28E-11	1,3166	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
24,356	57,246	16,545	-5,49E-11	1,6363	
24,571	56,881	-3,5948	-8,26E-11	51,307	4
24,788	30,482	75,666	-6,80E-12	2,7647	
25,003	-12,983	1,0751	-1,95E-11	61,869	5
25,219	-178,42	36,457	-1,81E-11	0,41338	
25,433	81,189	-16,832	-1,55E-11	6,9427	7
25,651	-137,33	-25,604	-6,67E-11	22,987	8
25,866	-62,999	-8,634	-9,94E-11	33,201	
26,083	-78,668	-63,606	6,18E-12	3,1222	
26,297	51,368	-21,43	-9,15E-11	5,6734	
26,513	-170,03	-16,135	-1,38E-11	6,84	9
26,728	161,16	-38,908	1,13E-11	0,23824	
26,945	140,7	-30,736	-2,83E-12	16,414	10
27,16	50,056	49,352	-5,76E-11	2,6095	
27,376	-2,4195	30,503	2,52E-12	16,419	
27,591	166,64	-45,13	-5,41E-12	16,096	11
27,807	132,66	-11,705	-5,27E-11	1,0725	
28,023	-64,745	-33,779	-5,24E-12	3,6551	
28,238	-68,309	55,606	-1,21E-11	36,856	12
28,454	-61,221	-43,227	-8,16E-11	0,68229	
28,671	152,78	27,13	1,32E-11	0,35829	
28,887	-175,67	57,392	-5,44E-11	23,875	13
29,101	22,641	26,814	1,28E-11	1,1039	
29,317	-147,37	-60,443	-3,10E-11	54,214	14
29,532	55,944	39,211	-3,73E-11	1,8154	
29,749	-56,681	-7,6167	-7,21E-11	0,4304	
29,965	103,54	-4,0192	-1,59E-11	0,97871	
30,18	115,08	-45,51	-8,84E-11	39,543	15
30,395	47,843	29,041	-7,65E-11	2,6658	
30,611	-45,687	-2,0687	-9,52E-11	64,467	16

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
30,827	-168,4	-9,8653	-3,31E-11	0,27898	
31,043	-126,76	-43,379	-4,27E-11	0,59556	
31,26	66,737	51,823	-1,01E-11	1,2528	
31,474	87,964	82,573	-9,29E-11	0,26571	
31,691	51,813	-22,52	2,13E-12	49,208	
31,906	-109,45	-41,756	-3,70E-11	3,7437	17
32,122	-32,466	-29,813	3,45E-12	92,899	18
32,338	5,4797	-65,521	-8,16E-11	78,056	19
32,553	-29,18	-55,871	-3,08E-11	3,1065	20
32,768	1,3703	37,998	-4,77E-11	53,204	21
32,984	0,087909	-35,799	-3,90E-11	0,22865	
33,201	50,635	-9,4928	-7,38E-11	30,411	22
33,416	159,23	-52,668	-6,64E-11	1,3082	
33,631	-125,88	54,18	-7,48E-11	34,147	23
33,847	128,62	32,186	-7,81E-11	0,28993	
34,064	133,23	18,727	-6,01E-11	1,6597	
34,278	100,02	-41,343	-6,98E-11	2,819	
34,494	117,84	-67,905	-3,37E-11	3,8826	24
34,709	135,49	-26,175	-7,07E-11	50,198	25
34,926	17,839	-14,589	-1,48E-11	0,72723	
35,142	-112,6	-47,348	-7,08E-11	21,827	26
35,358	-34,925	-11,36	-2,96E-11	1,1435	
35,574	130,4	44,462	-1,66E-11	77,964	27
35,788	-84,201	9,4739	1,32E-12	0,94796	
36,004	64,372	49,648	-6,13E-11	11,156	28
36,22	-12,616	61,759	-1,38E-11	4,0697	
36,437	-104,71	6,2461	-8,58E-11	0,65347	
36,651	-152,23	-11,598	-4,42E-11	4,3996	29
36,867	-50,527	-4,6661	-1,34E-11	3,9145	30
37,083	165,66	-34,239	1,24E-11	0,28219	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
37,299	114,73	36,915	-4,88E-11	28,468	31
37,514	-53,509	71,2	-9,56E-11	3,3491	32
37,731	-75,519	-66,131	-5,78E-11	0,65931	
37,945	-71,61	-15,716	-4,82E-12	50,025	33
38,162	72,291	-14,538	-5,28E-11	1,2833	
38,377	-154,87	-25,34	-4,21E-11	0,20374	
38,592	99,601	21,624	3,54E-13	0,27642	
38,81	94,136	5,3345	-4,38E-11	4,0261	34
39,026	101,47	15,991	-4,01E-11	1,9223	
39,241	20,748	-71,437	1,18E-11	0,62508	
39,457	-86,291	60,137	-2,48E-11	2,2808	
39,671	-165,88	45,552	-1,93E-11	0,20274	
39,888	-20,228	-52,201	-5,04E-12	3,2149	
40,103	112,98	-34,362	-1,84E-11	0,232	
40,319	-109,38	47,231	-2,37E-11	11,556	
40,534	-31,478	18,708	-7,11E-11	11,74	36
40,75	82,96	-38,433	-1,97E-12	1,6037	
40,966	-133,58	-41,684	-5,47E-11	1,4039	
41,181	-152,59	21,516	-6,12E-11	4,7849	37
41,397	89,932	-22,992	-3,98E-11	3,7375	38
41,614	-122,37	15,69	-5,77E-11	10,558	39
41,829	7,1357	-54,267	5,51E-12	1,546	
42,045	103,18	45,339	-7,89E-12	0,40836	
42,26	145,15	-23,435	7,74E-12	9,2754	40
42,477	-31,613	34,551	1,91E-12	29,945	41
42,693	-128,55	-18,616	1,22E-11	76,817	42
42,907	140,07	-34,06	-1,24E-12	11,023	43
43,123	65,62	15,581	-8,10E-11	0,31221	
43,34	122,96	13,896	-4,30E-12	9,5238	44
43,554	-105,51	-33,331	-3,67E-11	0,94051	



**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
43,769	139,86	85,683	-3,13E-11	0,2522	
43,987	-13,343	-40,766	-1,19E-11	0,23183	
44,202	0,13456	-55,616	-7,60E-12	35,797	
44,417	-137,65	-33,454	-2,90E-12	1,7992	45
44,634	-53,108	4,6767	-1,65E-11	25,315	46
44,85	26,841	32,799	-4,70E-14	1,075	
45,066	129,66	48,677	-6,93E-12	11,624	47
45,281	35,184	-25,802	8,86E-12	1,179	
45,496	171,17	-3,6545	-9,97E-11	19,063	48
45,712	85,146	29,446	-8,03E-11	29,941	49
45,927	-128,74	-50,894	-3,32E-11	51,949	
46,144	57,403	-23,961	-7,24E-11	0,97891	
46,359	125,17	28,07	-8,73E-11	0,44522	
46,575	6,4423	70,974	-2,06E-11	8,5649	51
46,79	57,872	25,835	-4,36E-11	22,549	52
47,007	76,723	-11,369	3,66E-13	19,263	53
47,223	-49,683	14,201	-3,05E-11	1,0595	
47,439	156,26	-13,999	-7,62E-11	2,4529	56
47,654	75,925	-39,475	-3,55E-11	1,214	
47,869	173,82	19,867	-9,87E-11	0,47034	
48,086	20,053	-5,0628	-5,81E-11	14,45	57
48,301	-172,64	43,095	-6,44E-12	50,985	58
48,517	-107,21	22,997	-4,94E-11	0,30996	
48,731	-66,681	71,768	-5,64E-11	18,088	
48,948	-35,526	-72,276	1,10E-11	0,34711	
49,164	-15,303	-6,9376	-5,01E-11	39,124	59
49,38	110,46	46,327	-5,22E-12	1,0715	
49,595	171,66	-2,6237	1,05E-11	1,0243	
49,812	-142,49	-21,144	-8,07E-11	0,66599	
50,026	80,502	-24,789	-6,25E-11	5,5437	60

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
50,243	155,46	-51,944	-9,48E-11	0,27827	
50,458	-57,799	6,1533	-6,36E-11	3,3951	
50,674	26,12	37,183	-2,40E-11	17,26	
50,889	107,63	-34,067	-8,82E-11	0,32439	
51,105	-177,03	-2,6474	-7,08E-11	70,33	61
51,32	93,367	-66,944	-7,06E-11	0,42016	
51,536	-176,99	-6,4205	9,26E-12	2,6862	62
51,752	-142,88	-17,403	-5,96E-11	0,5155	
51,968	65,556	23,867	-5,37E-11	60,599	63
52,184	-10,593	-58,351	7,73E-12	0,98982	
52,399	-134,46	-1,3221	-6,59E-11	1,4676	
52,614	-107,39	9,5011	-9,43E-11	0,25505	
52,831	69,881	9,0432	1,23E-11	1,8541	64
53,046	122,46	-15,711	-3,54E-11	0,58869	
53,261	-92,327	22,657	-2,62E-12	0,24219	
53,477	23,938	-8,6407	-7,60E-11	10,927	65
53,693	31,074	42,062	-7,05E-11	7,314	66
53,91	124,38	51,641	-8,98E-11	0,65512	
54,124	144,3	-26,974	-8,68E-11	1,014	
54,341	-149,73	7,5472	-8,66E-11	0,36829	
54,557	130,28	12,303	-4,96E-12	0,41029	
54,772	-27,704	-53,158	-3,79E-11	0,4639	
54,989	-15,302	-58,637	-9,81E-11	36,484	67
55,203	-130,27	6,0523	-4,69E-11	7,9372	68
55,42	173,16	27,43	-2,89E-11	80,603	69
55,636	-100,87	50,811	5,01E-12	11,073	
55,852	-89,552	-56,545	-9,55E-11	4,4443	70
56,067	-72,241	53,725	-8,09E-11	12,669	71
56,282	82,405	18,427	-1,33E-11	0,33526	
56,498	113,4	9,2384	-6,66E-11	18,871	72

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
56,714	-15,675	-50,144	-2,58E-11	1,3795	
56,928	86,266	49,628	-1,08E-11	1,8641	
57,145	-32,963	13,14	-5,83E-11	0,26901	
57,36	24,556	14,441	-7,24E-11	15,675	73
57,576	119,95	22,882	-2,91E-11	3,1489	74
57,791	115,79	43,932	-4,01E-11	20,069	75
58,008	-123,06	46,851	-3,71E-11	61,128	76
58,224	-162,84	-19,508	-7,93E-11	1,5827	78
58,44	-43,759	44,054	-9,94E-11	2,806	
58,655	-152,08	28,287	-1,73E-12	0,77438	
58,87	-152,81	52,508	-7,68E-11	7,1712	79
59,087	-94,698	15,748	-8,64E-12	39,451	80
59,302	-148,19	5,7289	5,40E-12	72,005	81
59,518	28,787	-81,671	-5,15E-11	43,948	82
59,735	144,26	-1,7001	-6,97E-11	43,702	83
59,951	-127,53	-2,9505	-9,20E-11	1,684	
60,165	127,2	28,436	-4,23E-11	3,1578	
60,38	85,998	-32,024	-8,96E-11	8,7281	85
60,596	-178,96	3,4587	1,24E-11	1,4853	
60,812	-31,095	-14,48	-7,19E-11	11,054	86
61,028	2,7365	-55,674	-4,01E-11	29,52	87
61,243	-115,96	-23,517	-8,82E-11	0,67522	88
61,458	87,318	-7,9825	-3,07E-11	10,789	90
61,675	17,521	-10,409	-3,23E-11	0,87968	
61,892	58,065	-16,873	4,86E-12	0,35912	
62,107	-150,87	-11,681	-5,97E-11	6,7587	92
62,321	80,275	7,398	-9,46E-11	0,45967	
62,538	-141,46	10,247	-7,14E-11	0,22013	
62,753	76,956	56,046	7,53E-12	0,40945	
62,969	-132,44	-60,982	-3,05E-11	25,845	93

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
63,185	-47,27	80,781	-2,80E-11	7,3444	94
63,402	150,11	-29,76	-1,55E-11	19,285	95
63,616	-49,734	-14,416	-1,33E-11	7,1951	96
63,832	24,22	-33,467	-5,06E-11	13,222	97
64,048	112,69	-15,491	-1,71E-11	2,3511	
64,264	104,85	50,075	-1,18E-11	17,27	98
64,481	176,3	39,809	9,81E-12	24,194	99
64,695	36,139	24,972	-7,25E-11	52,734	
64,911	-100,79	43,491	-5,25E-11	51,188	100
65,126	-21,356	21,272	-6,43E-11	0,981	
65,342	43,108	37,515	1,02E-11	1,8996	
65,559	-61,818	-8,9556	-5,35E-11	54,023	101
65,774	-61,904	8,5844	-5,71E-11	0,33703	
65,99	56,862	34,615	-3,08E-11	0,58342	
66,205	-119,25	72,805	-6,68E-12	0,98699	
66,421	161,62	20,29	-6,44E-12	0,42167	
66,636	102,05	-37,381	-6,32E-11	1,0613	
66,853	115,77	13,607	-8,51E-11	0,39136	
67,068	-27,778	43,415	3,62E-12	18,115	102
67,284	35,039	65,605	-4,94E-11	17,341	
67,5	-59,277	-35,139	-2,65E-11	1,2974	103
67,715	137,82	-53,565	-4,09E-11	0,63968	105
67,931	34,958	-48,584	-6,22E-11	11,066	107
68,148	-22,701	-0,57597	-4,61E-11	41,775	109
68,363	73,187	-68,835	-7,30E-11	0,40641	
68,578	-11,378	-21,18	-8,62E-11	0,40387	
68,795	77,888	-0,87476	-3,92E-11	22,155	110
69,01	-120,03	-41,003	-8,28E-11	70,014	111
69,225	44,764	55,667	4,17E-12	41,573	113
69,44	-9,6865	9,703	-2,43E-11	0,56814	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	<b>Indice</b>
69,656	-34,348	-21,202	-4,51E-11	0,58696	
69,872	-45,02	-38,027	-5,90E-12	1,8672	
70,089	23,847	-33,464	-1,59E-11	14,114	116
70,304	-135,66	14,014	-3,89E-11	3,7107	
70,519	-1,8238	-25,922	-9,02E-11	0,72594	
70,734	48,182	34,945	-9,58E-11	6,8299	118
70,952	100,09	-61,315	1,41E-11	34,952	121
71,166	-173,32	51,689	-1,15E-11	28,234	122
71,382	114,4	-25,912	2,67E-12	12,636	123
71,598	17,538	-2,248	-3,67E-11	1,8058	
71,815	-155,25	29,592	-2,08E-11	64,505	124
72,03	76,073	29,791	-9,95E-11	81,352	125
72,245	124,05	-25,867	-1,34E-11	0,33623	
72,461	49,516	8,8118	-1,56E-11	22,565	127
72,676	-160,45	35	7,44E-12	4,1211	
72,892	176,76	61,015	-9,54E-11	13,839	129
73,109	68,159	-10,952	1,23E-11	1,8394	
73,324	-65,846	41,775	6,63E-12	42,529	130
73,54	-28,054	40,912	-9,53E-11	28,634	131
73,756	-163,13	48,53	-7,63E-11	62,455	132
73,972	-152,84	-33,383	-7,66E-11	2,5691	133
74,187	-126,23	26,769	-2,84E-11	3,9892	
74,402	47,178	7,9324	-3,94E-11	75,328	134
74,617	-112,65	-28,72	-8,44E-11	0,46107	
74,835	118,47	-67,092	-4,69E-11	3,8258	
75,051	23,674	14,692	-2,63E-11	6,6003	
75,266	-9,6751	-65,252	-7,41E-11	0,95492	137
75,48	-95,158	-3,656	-3,37E-11	1,1231	
75,696	93,051	66,928	6,92E-12	7,7441	141
75,913	168,63	-28,974	1,40E-12	22,916	144

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
76,129	61,489	-3,5841	-7,34E-11	1,5769	
76,344	-51,932	-54,687	-8,62E-11	77,889	145
76,56	-48,896	-11,117	-7,50E-11	3,451	146
76,776	139,75	-22,549	-3,30E-11	31,658	147
76,991	156,82	14,481	-6,77E-11	16,771	148
77,208	100,83	83,388	-3,94E-11	2,2627	
77,422	169,96	-31,814	-3,36E-11	0,2334	
77,638	72,927	36,05	-4,20E-11	0,58991	
77,855	-25,419	-8,4039	-7,53E-11	2,9369	
78,07	-132,84	-14,712	-8,80E-11	2,6106	
78,287	-135,2	22,064	-7,40E-11	0,4348	
78,502	171,59	71,742	-9,42E-11	44,613	
78,717	99,496	23,939	-8,56E-11	14,057	150
78,933	138,19	-54,611	-4,78E-11	4,1012	
79,148	33,385	26,257	-3,84E-11	76,054	151
79,363	102,02	-48,416	3,89E-12	40,969	
79,581	-65,214	7,8586	-9,34E-11	0,26251	
79,795	-16,843	-12,197	-5,07E-11	24,433	152
80,011	100,25	67,533	-2,59E-12	7,5078	153
80,227	5,6276	-36,906	-9,30E-11	25,53	156
80,443	-154,71	-26,799	-3,15E-11	3,9577	157
80,658	-58,4	-75,765	1,07E-12	94,318	158
80,875	-177,15	-61,227	-5,88E-11	0,38211	
81,091	-136,47	29,978	-2,02E-11	0,4844	
81,305	141,18	-20,581	-4,75E-11	0,59995	
81,522	-12,149	-11,659	-3,78E-11	3,8669	159
81,737	-76,58	-1,1049	-5,06E-12	68,351	160
81,953	58,446	-6,4261	-1,13E-11	34,355	161
82,169	83,833	-24,69	-3,79E-11	3,956	162
82,385	-24,865	-79,726	-7,71E-11	76,051	163

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
82,599	80,073	-2,7572	-8,41E-11	0,28935	
82,815	-72,506	0,062056	-3,12E-11	56,696	164
83,03	97,674	24,543	-5,77E-11	23,644	165
83,246	-106,18	44,449	-6,77E-11	8,1375	167
83,463	-177,1	-37,614	-3,92E-11	6,0624	169
83,679	-65,071	16,85	-7,11E-12	24,269	170
83,894	-32,305	-21,806	-4,51E-11	13,489	171
84,111	96,712	-36,052	-7,07E-12	2,2838	
84,325	-176,08	5,0921	-5,36E-12	4,267	172
84,542	177,47	33,397	-7,02E-11	0,22448	
84,757	-24,716	-24,344	-7,05E-11	8,8507	173
84,972	26,381	-25,559	-4,96E-11	28,684	174
85,188	-71,306	-3,3049	-1,25E-11	0,37903	
85,405	-20,986	42,024	-2,27E-11	5,1778	175
85,62	-101,24	-19,462	5,52E-12	0,31803	
85,835	73,181	35,035	-5,35E-11	0,6983	
86,052	146,35	4,9567	-2,84E-13	2,2546	
86,268	-68,751	-29,98	-1,10E-12	4,198	177
86,483	-109,93	-9,3523	-1,99E-11	6,1687	180
86,699	-116,02	-4,1463	-9,05E-11	0,67767	
86,914	63,469	26,818	-9,95E-11	0,62203	
87,131	115,1	-50,22	-2,89E-11	10,427	182
87,347	157,82	57,383	-2,06E-11	15,705	
87,562	-25,949	60,099	-4,15E-11	4,5513	183
87,778	-162,83	26,951	1,34E-11	1,5081	
87,993	-101,54	-3,68	-1,81E-11	0,85275	
88,208	-174,47	-53,049	-7,50E-12	46,175	184
88,424	48,55	47,637	-8,88E-11	0,51322	
88,64	-163,6	28,507	-3,24E-11	9,3855	185
88,857	93,412	-31,811	-6,08E-11	0,9539	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
89,071	-11,641	13,385	-6,52E-11	0,46844	
89,287	-47,926	-20,305	9,57E-12	1,3071	
89,503	107,29	-19,136	-7,41E-11	10,714	186
89,718	-76,489	-18,305	-2,60E-11	9,7571	187
89,935	158,51	-13,993	-7,54E-11	1,4643	
90,151	-69,727	17,756	-2,17E-11	4,0602	
90,367	-161,63	20,797	9,45E-12	2,8021	
90,583	86,823	-26,575	-4,39E-11	0,44247	
90,798	101,94	5,3815	-5,07E-11	70,23	189
91,012	-177,06	-18,906	-1,64E-11	0,38608	
91,228	-126,24	31,927	-9,78E-11	0,39365	
91,445	-131,99	-3,6332	-5,51E-11	1,2571	
91,661	-53,043	-26,555	-4,01E-11	17,184	190
91,876	176,84	-26,956	-1,19E-11	0,24132	
92,093	-52,925	-0,22144	-5,20E-11	0,44125	
92,308	-19,919	-66,564	-8,44E-11	5,9999	191
92,524	168,3	49,546	-8,99E-11	0,38673	
92,738	-19,431	1,6989	-1,58E-11	0,76538	
92,954	101,11	-36,634	-1,70E-11	11,234	192
93,17	92,536	15,669	-3,89E-11	4,5315	193
93,385	-20,098	49,057	-4,23E-11	0,38757	
93,601	-146,74	72,121	-3,06E-11	31,525	194
93,819	-9,4632	-13,074	-8,38E-11	41,167	195
94,034	96,936	-49,266	-2,53E-11	16,045	196
94,249	-144,02	-3,3334	-7,33E-12	35,559	198
94,464	-53,849	29,686	-7,29E-11	1,2177	200
94,68	-86,328	-71,418	-1,13E-11	61,316	201
94,897	72,932	-34,548	1,38E-11	37,347	
95,112	-13,236	22,547	-9,41E-12	49,47	202
95,329	40,89	20,835	-4,34E-11	7,1302	203



**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
95,542	-143,74	-44,454	1,47E-11	89,814	204
95,758	-13,609	-9,8748	-6,99E-11	3,1188	206
95,974	-131,96	-10,808	-7,71E-11	96,95	209
96,19	-17,203	72,433	-2,19E-11	1,1551	
96,407	-152,18	-27,72	7,85E-12	6,8482	210
96,623	42,442	-22,444	-4,35E-11	5,9551	211
96,837	164,94	22,677	-4,89E-11	30,2	212
97,054	77,573	23,967	-7,26E-11	0,63576	
97,268	124,63	24,263	-9,01E-12	1,4984	
97,485	-14,115	-27,062	7,23E-12	29,07	213
97,7	-87,265	6,8008	-3,94E-11	30,124	214
97,916	143,95	-35,077	-4,92E-12	58,512	215
98,131	-70,847	-46,971	-3,25E-11	6,5646	216
98,347	61,275	-36,472	-7,21E-11	0,84094	
98,564	163,95	-79,37	1,24E-11	1,538	
98,778	30,837	51,175	-5,44E-11	42,798	217
98,996	126,27	8,0499	-4,83E-11	0,2077	
99,21	171,29	58,962	-5,08E-11	36,109	219
99,425	-75,226	-29,536	4,08E-13	73,992	220
99,642	96,846	-27,308	-9,98E-11	1,7865	
99,858	-26,352	8,3867	1,48E-11	81,792	221
100,07	-141,46	15,765	5,23E-13	0,42647	223
100,29	-36,212	30,15	-4,55E-11	1,7852	
100,5	108,75	-38,515	-7,54E-12	4,5626	224
100,72	100,04	33,603	-9,85E-11	15,733	225
100,94	84,115	52,734	1,26E-11	1,6755	
101,15	145,39	-49,283	-5,77E-11	9,559	226
101,37	-6,2342	-2,27	-4,88E-11	0,54233	
101,58	-84,178	22,451	-9,35E-11	14,471	227
101,8	-92,432	-8,2166	-8,03E-11	0,31778	229

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
102,02	-35,464	-20,62	1,00E-11	1,2128	
102,23	-40,82	-19,575	-8,71E-11	33,069	232
102,45	-10,344	58,329	-7,99E-12	66,757	233
102,66	-57,102	-57,889	-3,10E-11	1,4575	
102,88	-98,768	-29,236	-7,46E-11	0,7633	
103,09	-142,46	66,296	-4,41E-11	3,035	234
103,31	-38,331	-14,349	-7,22E-11	0,46665	
103,52	-59,362	-10,99	-1,40E-11	27,611	235
103,74	140,62	84,367	-6,84E-11	0,48766	237
103,96	101,87	-50,653	-2,32E-11	4,47	239
104,17	93,375	3,8093	6,01E-12	2,2551	240
104,39	21,219	-49,122	8,00E-12	10,67	241
104,6	44,787	58,143	-6,28E-11	39,517	242
104,82	-101,25	58,291	-2,15E-11	7,5268	243
105,04	12,514	-28,169	-8,92E-11	8,1677	244
105,25	38,673	54,12	-9,91E-11	29,463	246
105,47	65,703	10,7	-7,64E-11	43,95	249
105,68	79,847	-28,536	-9,85E-12	27,627	251
105,9	-15,324	15,2	-8,12E-11	0,22296	
106,11	-114,79	3,5585	-1,55E-11	1,5053	
106,33	77,519	69,033	-6,99E-11	2,8045	
106,54	-129,25	58,499	-2,70E-11	1,541	
106,76	32,831	-31,691	-6,48E-11	0,3849	
106,98	-132,82	75,706	-6,56E-11	7,7263	252
107,19	-14,424	-50,334	-9,98E-11	3,5933	253
107,41	2,9156	-17,134	-1,11E-11	0,23208	
107,62	-32,316	-47,472	-1,96E-11	11,274	254
107,84	130,02	-8,1821	-5,20E-11	0,39586	
108,05	121,26	18,376	-9,36E-11	0,32414	
108,27	-112,93	10,256	-1,23E-11	0,22553	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
108,49	135,06	50,174	-6,20E-11	4,9405	255
108,7	-131,3	-15,157	-4,38E-11	0,29901	
108,92	144,28	70,591	6,33E-12	0,21998	
109,13	29,078	-43,356	-4,98E-11	2,4731	
109,35	-143,45	-30,114	-6,34E-11	2,5952	
109,56	-86,086	-35,782	-9,71E-11	64,337	257
109,78	-166,37	17,793	-4,47E-11	0,42831	
110	-134,11	2,9419	-4,42E-12	76,53	
110,21	140,86	54,906	-6,57E-11	1,604	
110,43	140,8	-54,392	-1,99E-11	4,025	259
110,64	-163,18	13,634	-6,13E-11	1,2343	
110,86	162,32	-44,639	-2,82E-11	0,23399	
111,08	136,09	-13,366	-5,79E-11	47,287	260
111,29	-167,19	-2,5763	-4,85E-11	3,2046	262
111,51	154,55	38,525	-7,74E-11	0,79436	264
111,72	55,133	15,61	-7,25E-11	3,9056	267
111,94	-13,867	16,039	8,91E-12	0,7034	269
112,15	138,29	16,745	-2,08E-11	0,56082	
112,37	169	63,146	1,34E-11	17,772	270
112,58	-97,844	-36,8	-4,16E-11	1,4644	
112,8	-168,21	40,617	9,89E-12	3,9942	
113,02	122,37	-64,805	-2,40E-11	36,989	271
113,23	138,44	75,181	8,88E-12	1,8397	272
113,45	-103,9	-28,063	-2,81E-11	0,39636	274
113,66	-41,861	57,366	-8,84E-11	33,656	275
113,88	106,59	4,4653	-8,51E-11	0,5749	277
114,1	-33,972	-52,186	-8,13E-11	0,49871	
114,31	-115,53	-21,247	-2,62E-11	51,894	279
114,53	-173,8	39,37	-7,12E-11	0,37227	
114,74	3,9869	42,073	-3,76E-11	0,50211	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
114,96	-150,38	20,832	-3,15E-12	2,1018	
115,17	25,497	-0,563 17	-6,01E-11	0,27105	
115,39	-146,37	75,945	-1,69E-11	82,704	280
115,61	-164,26	50,72	-6,47E-11	10,441	281
115,82	-22,552	-57,305	8,88E-12	20,37	282
116,04	157	-48,499	-1,59E-11	31,05	283
116,25	-173,48	14,197	-7,25E-11	4,3069	285
116,47	-66,638	-51,555	-1,94E-11	16,296	287
116,68	99,684	-8,7381	-5,26E-11	0,7368	
116,9	-5,8739	44,505	-5,88E-11	80,57	290
117,11	89,828	-25,255	-3,62E-12	4,9022	291
117,33	159,81	-46,159	-4,10E-11	67,247	
117,55	-148,7	21,193	-6,47E-11	0,30899	
117,76	-89,164	-67,356	-2,79E-11	47,567	293
117,98	116,19	-44,192	-7,18E-11	4,7424	296
118,19	49,765	72,694	-6,80E-11	0,95531	
118,41	-137,82	-59,709	-7,27E-11	2,052	
118,62	-33,653	-33,125	-2,06E-11	0,96242	
118,84	61,513	-38,595	-7,37E-11	1,2802	
119,06	-148,88	45,901	-6,98E-11	4,0898	297
119,27	-8,4923	27,346	-5,16E-11	0,32264	299
119,49	167,23	29,472	-6,64E-11	18,767	302
119,7	-163,43	-7,2724	-4,00E-11	61,927	305
119,92	-117,71	-21,946	-5,53E-11	5,9987	307
120,13	-62,159	44,341	-6,57E-12	3,612	
120,35	106,56	-62,037	-4,40E-11	15,272	309
120,57	161,26	18,086	-4,94E-11	2,8454	
120,78	-40,632	-70,148	7,28E-12	83,924	
121	-176,23	-33,483	-1,72E-11	4,2193	
121,21	54,058	-27,101	-4,12E-11	27,322	310

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	Indice
121,43	-168,47	39,456	-1,14E-11	1,1672	
121,65	-19,615	-2,2747	1,11E-11	23,683	311
121,86	27,818	34,334	-1,15E-11	1,4234	
122,08	87,881	-67,371	-8,90E-11	31,432	
122,29	2,821	-22,077	1,32E-12	12,924	312
122,51	21,438	-43,051	-9,65E-11	23,974	314
122,72	-57,971	-65,794	-7,16E-11	24,437	315
122,94	43,936	32,53	-5,82E-11	0,21009	
123,16	10,997	-27,569	-1,94E-11	3,2185	316
123,37	-105,66	-10,959	-6,50E-11	17,789	317
123,59	79,465	-70,775	-6,42E-11	2,9013	
123,8	-100,78	42,758	-2,15E-11	5,0732	318
124,02	-125,22	18,284	-6,89E-11	0,69886	
124,23	164,04	-24,82	-6,51E-11	0,66094	
124,45	80,543	-17,51	-1,42E-11	72,547	319
124,67	173,33	44,784	-1,09E-11	0,70919	
124,88	57,438	27,583	-1,67E-11	2,61	320
125,1	-33,813	6,6681	-1,55E-11	3,8096	
125,31	159,8	-53,546	4,43E-14	10,868	322
125,53	140,59	-38,94	-2,18E-11	3,8036	
125,74	177,39	-34,266	-8,04E-11	24,5	326
125,96	-150,24	79,195	-2,42E-11	71,86	
126,18	5,5331	57,731	-9,73E-11	7,9505	327
126,39	115,06	-50,525	-4,56E-11	18,89	328
126,61	-7,0553	-12,112	-9,14E-12	1,2204	
126,82	51,82	-29,126	-3,31E-11	23,557	329
127,04	17,295	-16,779	-8,69E-11	1,7326	331
127,25	147,88	-7,8076	-9,62E-11	7,1703	332
127,47	140,56	-0,40879	-1,07E-11	15,949	333
127,68	-144,26	50,559	-2,44E-11	0,82354	

**Tabella B.1.** Sorgenti iniettate. Gli indici nell'ultima colonna corrispondono a quelli dei segnali ricostruiti più vicini.

<b>Frequenza</b> [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]	SNR	<b>Indice</b>
-----------------------	-----------------	---------------	---	-----	---------------

**Tabella B.2.** Parametri recuperati.

<b>indice</b>	<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
1	20,905	317,74	23,595	2,01E-11
2	21,323	23,227	-14,279	-9,69E-11
3	21,982	311,7	-36,786	-2,68E-11
4	24,569	94,049	53,4	-3,33E-12
5	25,004	335,14	-5,9228	2,21E-11
6	25,155	148,29	47,336	-2,64E-11
7	25,433	78,374	27,787	1,42E-11
8	25,65	230,23	22,035	-1,90E-11
9	26,513	193,58	-27,97	2,32E-11
10	26,945	142,37	34,057	1,04E-13
11	27,591	163,48	-50,843	1,41E-11
12	28,238	284,85	-53,038	2,55E-12
13	28,886	195,67	58,65	2,12E-13
14	29,318	226,47	-59,715	3,01E-11
15	30,178	135,7	-42,396	-1,27E-11
16	30,606	308,53	26,154	-1,31E-11
17	31,905	255,65	-37,114	9,54E-12
18	32,122	327,7	-30,73	-3,29E-12
19	32,337	352,02	58,285	7,23E-12
20	32,552	336	-52,121	-7,52E-12
21	32,768	346,64	47,093	1,79E-11
22	33,2	40,375	-34,507	2,04E-11
23	33,63	241,11	-44,056	1,13E-11
24	34,494	126	73,269	1,20E-11
25	34,705	141,42	26,542	-3,26E-11
26	35,141	258,94	-36,34	1,19E-11
27	35,574	131,52	-47,916	6,32E-12
28	36,004	73,65	63,904	-1,58E-11
29	36,649	203,3	-27,742	-1,50E-11
30	36,867	310,27	-4,1768	4,85E-13

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
31	37,299	111,17	46,925	3,30E-11
32	37,513	321,58	56,305	2,53E-11
33	37,945	287,82	-12,398	-3,99E-12
34	38,81	108,79	25,092	2,16E-11
35	39,987	8,1775	-23,984	-1,07E-10
36	40,533	325,44	-16,674	2,07E-11
37	41,179	212	31,418	1,31E-11
38	41,397	87,001	-29,72	1,06E-11
39	41,613	243,36	17,204	-3,85E-12
40	42,26	144,62	-22,818	5,05E-13
41	42,477	329,97	-33,341	7,12E-12
42	42,693	229,82	-19,224	-7,66E-12
43	42,907	141,86	-32,532	-1,32E-11
44	43,34	123,4	13,047	-1,13E-11
45	44,417	222,33	-29,867	-1,52E-12
46	44,634	303,21	-7,4299	-1,50E-11
47	45,066	130,72	49,937	3,38E-12
48	45,494	172,82	21,6	-2,39E-11
49	45,709	99,085	42,136	-2,40E-11
50	46,027	80,332	70,435	1,28E-11
51	46,576	346,24	-74,145	1,12E-11
52	46,789	53,284	-23,875	7,82E-12
53	47,007	77,238	12,065	-5,01E-12
54	47,073	76,29	-12,746	-6,59E-11
55	47,157	91,644	-71,973	-3,46E-11
56	47,437	160,6	-11,118	1,20E-11
57	48,085	14,334	-5,2345	2,07E-11
58	48,3	186,78	41,883	-1,55E-11
59	49,165	337,34	5,1571	2,37E-11
60	50,028	153,79	-64,016	-5,08E-11



**Tabella B.2.** Parametri recuperati.

<b>indice</b>	<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
61	51,104	185,39	24,694	3,32E-11
62	51,525	164,21	31,837	-1,10E-10
63	51,965	104,46	-40,317	-6,28E-11
64	52,831	71,941	1,6542	-1,73E-11
65	53,476	20,321	-6,8892	-1,68E-11
66	53,692	23,663	41,252	1,98E-11
67	54,987	340,16	-53,078	2,78E-11
68	55,203	234,06	4,3686	1,85E-11
69	55,42	176,74	-29,327	2,38E-11
70	55,848	236,29	40,451	-1,79E-11
71	56,062	276,18	46,457	-2,51E-11
72	56,497	111,38	-21,907	1,72E-11
73	57,359	18,775	-11,65	2,65E-11
74	57,575	119,25	28,386	1,82E-11
75	57,79	116,56	45,925	-2,77E-11
76	58,008	242,04	-44,484	3,05E-11
77	58,09	292,82	-76,668	1,82E-11
78	58,222	231,21	-38,499	-3,46E-11
79	58,867	203,9	49,41	2,02E-12
80	59,088	266,13	-12,809	1,10E-11
81	59,302	211,37	-1,6168	-2,99E-12
82	59,518	323,51	-84,994	1,06E-12
83	59,733	142,12	18,93	1,81E-11
84	59,797	314,73	-70,293	-1,02E-11
85	60,377	81,716	38,164	1,69E-12
86	60,81	326,83	-17,472	1,01E-11
87	61,027	0,53586	51,163	2,02E-11
88	61,211	340,27	-76,306	-2,32E-11
89	61,369	333,5	-65,598	2,03E-11
90	61,458	85,894	18,232	1,09E-11

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
91	61,614	231,31	69,797	-5,20E-13
92	62,103	191,99	-66,546	-8,09E-12
93	62,969	232,73	-59,124	2,51E-11
94	63,184	312,3	79,328	1,77E-11
95	63,402	148,82	-33,631	1,60E-11
96	63,616	310,48	-8,5954	1,70E-11
97	63,831	20,954	-27,422	2,19E-11
98	64,264	104,04	51,146	6,27E-12
99	64,48	175,08	39,137	-2,26E-12
100	64,91	262,21	39,157	1,61E-11
101	65,554	303,97	-7,1753	-3,79E-11
102	67,068	332,31	43,524	1,87E-12
103	67,49	349,47	48,872	-4,77E-11
104	67,61	329,27	-53,464	-8,00E-11
105	67,68	332,86	48,085	-3,29E-11
106	67,85	336,39	43,11	-8,33E-11
107	67,933	325,99	-73,863	-2,99E-11
108	67,99	336,16	-29,101	-7,15E-11
109	68,147	335,17	-5,4845	1,76E-11
110	68,795	76,105	-15,889	1,60E-11
111	69,007	238,86	-32,94	9,67E-12
112	69,099	261,05	-69,75	-9,72E-11
113	69,225	47,156	57,798	-2,07E-11
114	69,282	242,03	41,905	-1,21E-11
115	69,335	239,81	-54,9	-1,46E-11
116	70,09	22,036	-32,811	1,66E-11
117	70,446	32,726	45,083	-2,98E-11
118	70,731	52,511	55,551	-2,15E-11
119	70,813	18,992	-36,664	-5,08E-11
120	70,875	33,149	-40,853	-8,65E-11

**Tabella B.2.** Parametri recuperati.

<b>indice</b>	<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
121	70,952	106,58	-60,928	-1,64E-11
122	71,166	187,46	51,945	6,20E-13
123	71,382	114,31	-25,839	3,91E-12
124	71,815	206,83	30,241	2,00E-11
125	72,028	73,251	38,037	9,49E-12
126	72,193	78,693	58,185	-5,70E-11
127	72,459	52,779	14,126	-3,77E-11
128	72,539	85,743	-49,367	-5,17E-11
129	72,887	159,9	65,93	-1,40E-11
130	73,324	293,31	-42,647	-7,58E-12
131	73,536	336,58	33,558	-4,42E-13
132	73,754	198,75	45,286	5,66E-12
133	73,969	205,69	-37,615	-1,57E-11
134	74,402	44,138	11,645	2,93E-11
135	75,14	32,167	-21,454	-5,75E-11
136	75,198	25,075	17,532	-6,27E-11
137	75,292	20,443	-11,262	-3,47E-11
138	75,398	18,96	-6,9341	-2,53E-11
139	75,553	34,573	50,015	-2,03E-11
140	75,622	33,393	25,013	2,04E-11
141	75,695	96,545	-65,981	-3,47E-11
142	75,747	27,06	-33,668	-4,00E-13
143	75,848	68,738	56,291	-5,46E-11
144	75,913	168,79	-28,407	-3,19E-12
145	76,34	322,85	-49,911	7,22E-12
146	76,556	310,54	-8,7847	-1,68E-11
147	76,776	139,72	-26,047	1,79E-11
148	76,989	157,64	21,227	8,07E-12
149	78,552	221,19	-37,241	-4,05E-11
150	78,715	96,343	30,459	2,10E-11

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
151	79,148	30,101	-34,507	2,85E-11
152	79,794	340,55	13,948	1,79E-11
153	80,011	98,505	67,444	3,58E-12
154	80,076	101,12	66,644	1,96E-11
155	80,142	95,896	66,127	-5,07E-11
156	80,224	8,9185	-8,4738	7,23E-12
157	80,441	199,7	-38,421	-3,22E-11
158	80,658	296,83	-76,023	-1,42E-11
159	81,522	345,88	-10,792	-3,01E-12
160	81,732	288,9	-21,469	-7,85E-11
161	81,952	57,946	-9,2633	1,04E-12
162	82,168	82,331	-28,887	2,11E-11
163	82,38	308,26	-77,25	-1,41E-11
164	82,815	293,76	0,61341	2,29E-11
165	83,03	96,242	-30,294	1,38E-11
166	83,119	99,739	39,198	-1,05E-10
167	83,245	257,72	43,7	9,11E-12
168	83,339	104,57	29,63	-3,61E-11
169	83,463	185,06	-37,465	2,09E-12
170	83,679	295,27	15,152	3,86E-12
171	83,891	329,88	21,753	-3,28E-11
172	84,325	184,32	9,9469	9,02E-12
173	84,757	334,26	-19,166	1,88E-11
174	84,973	21,804	-29,189	3,81E-11
175	85,405	337,95	39,369	2,31E-11
176	86,118	146,3	2,4756	-4,46E-11
177	86,268	291,12	-29,686	9,19E-13
178	86,318	147,44	-10,831	-6,54E-11
179	86,369	144,65	-3,3902	-7,87E-11
180	86,483	250,38	-1,0324	-9,99E-12

**Tabella B.2.** Parametri recuperati.

<b>indice</b>	<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
181	86,549	147,25	-3,2076	-2,20E-11
182	87,131	114,79	-51,964	-3,21E-12
183	87,561	333,11	58,403	1,40E-11
184	88,208	185,84	-53,036	-2,96E-12
185	88,638	195,69	28,291	-1,57E-11
186	89,502	106,31	27,117	1,85E-11
187	89,718	284,9	-15,411	1,84E-11
188	90,007	180	89,816	0
189	90,797	100,61	16,244	1,94E-11
190	91,66	306,92	-22,728	1,60E-11
191	92,304	340,24	-64,498	-2,81E-11
192	92,954	101	-37,57	-1,52E-12
193	93,169	91,296	20,736	1,17E-11
194	93,601	216,53	71,208	-9,01E-12
195	93,817	348,28	-4,1615	3,49E-11
196	94,034	94,699	-50,672	2,50E-11
197	94,175	92,245	46,903	-4,36E-11
198	94,25	216,72	12	1,87E-11
199	94,38	88,901	52,266	-3,09E-11
200	94,438	82,596	-44,79	-3,54E-11
201	94,68	275,77	-70,636	1,88E-11
202	95,112	346,64	22,867	-1,07E-11
203	95,328	38,596	19,981	1,64E-11
204	95,592	352,65	4,2319	-2,82E-11
205	95,663	347,36	55,209	-1,33E-11
206	95,754	342,06	9,0694	-5,18E-13
207	95,815	346,68	6,8149	-5,59E-11
208	95,877	356,12	11,789	-1,45E-11
209	95,971	229,7	7,5019	5,73E-12
210	96,407	207,14	-27,579	-6,16E-12

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
211	96,622	41,197	-25,094	-1,12E-11
212	96,836	165,43	26,514	8,21E-12
213	97,485	346,22	-28,449	-6,30E-12
214	97,699	275,5	1,3399	2,04E-11
215	97,917	144,32	-35,243	1,08E-12
216	98,131	289,99	-44,71	2,31E-11
217	98,777	26,931	51,258	1,97E-11
218	98,847	298,42	-53,157	-2,58E-11
219	99,209	172,78	59,652	2,18E-11
220	99,425	283,64	-29,34	-1,39E-11
221	99,858	333,95	11,697	-3,33E-12
222	100	16,5	89,234	1,81E-11
223	100,06	147,04	-85,302	-6,56E-11
224	100,5	109,34	-39,009	-5,44E-12
225	100,72	98,312	38,312	-8,04E-13
226	101,15	142,72	-52,071	-9,99E-12
227	101,58	277,66	14,118	2,86E-12
228	101,69	153,55	-31,337	-9,63E-12
229	101,79	161,74	-42,661	-6,90E-11
230	101,91	135,98	-51,78	1,55E-12
231	101,96	145,52	-46,036	9,91E-12
232	102,23	320,13	10,438	-3,01E-12
233	102,45	348,85	58,611	-3,82E-12
234	103,09	220,08	65,489	-1,65E-11
235	103,52	302,25	-2,4018	1,76E-11
236	103,66	209,71	57,962	-5,09E-12
237	103,72	216,93	79,934	-1,39E-11
238	103,8	219,66	65,697	9,18E-12
239	103,96	100,35	-51,567	6,15E-12
240	104,17	95,508	8,1333	-3,03E-11

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
241	104,39	21,942	-50,277	-1,58E-11
242	104,6	42,211	60,875	-1,41E-11
243	104,82	261,88	58,037	2,70E-11
244	105,03	10,143	-29,854	-3,93E-11
245	105,12	12,025	-23,438	8,04E-12
246	105,25	37,61	57,33	-1,41E-11
247	105,3	3,0616	-27,595	-8,29E-12
248	105,37	9,5767	-29,468	-9,97E-11
249	105,47	64,985	16,757	-5,78E-11
250	105,52	15,278	27,054	-9,57E-11
251	105,68	78,729	-28,203	1,43E-11
252	106,98	229,8	75,068	3,62E-12
253	107,19	342,81	-49,231	-2,39E-11
254	107,62	327,08	-46,719	2,07E-14
255	108,49	132,93	52,768	7,17E-12
256	108,86	193,26	-31,842	6,49E-12
257	109,56	282,1	-32,493	2,02E-11
258	109,89	23,998	-34,383	-3,56E-11
259	110,43	141,11	-55,591	1,39E-11
260	111,07	136,28	-20,629	1,94E-11
261	111,19	147,55	-1,1481	-2,68E-11
262	111,28	131,92	-30,494	-6,20E-11
263	111,44	129,68	5,49	-7,12E-11
264	111,49	134,58	-12,934	-8,14E-12
265	111,6	127,23	-6,7692	2,01E-12
266	111,66	142,96	3,3174	-1,19E-11
267	111,72	99,422	32,046	-8,48E-11
268	111,84	140,12	-13,549	3,32E-12
269	111,96	137,1	-19,496	7,87E-12
270	112,37	169	62,723	-8,32E-12

Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{f}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
271	113,02	121,41	-66,09	1,53E-11
272	113,19	241,72	79,362	-4,08E-11
273	113,33	127,05	66,712	-3,05E-11
274	113,44	127,17	63,429	-1,05E-10
275	113,66	319,1	53,968	1,60E-11
276	113,79	69,923	-65,564	2,23E-11
277	113,89	107,2	-81,074	-1,12E-10
278	113,98	103,16	68,931	6,34E-12
279	114,31	246,22	21,335	2,38E-11
280	115,39	217,19	76,277	1,56E-11
281	115,6	196,9	52,062	1,66E-11
282	115,82	337,45	-57,626	-1,95E-12
283	116,04	157,77	-49,694	1,57E-11
284	116,13	157,1	51,948	1,11E-11
285	116,25	187,18	15,717	2,59E-11
286	116,32	151,14	-47,658	-1,05E-10
287	116,47	294,5	-50,51	2,16E-11
288	116,54	162,66	-47,833	-4,13E-11
289	116,62	157,89	-43,413	-8,26E-11
290	116,9	353,3	42,664	5,07E-12
291	117,11	90,43	-25,958	-1,26E-11
292	117,64	90,734	-27,038	-5,34E-11
293	117,76	288,66	-69,893	-5,15E-11
294	117,85	91,771	-17,024	-1,27E-11
295	117,91	90,921	-28,349	-2,73E-11
296	117,98	116,73	-47,206	1,44E-11
297	119,05	213,94	45,315	3,38E-12
298	119,12	217,38	34,848	-4,43E-11
299	119,23	211,06	33,694	-6,82E-11
300	119,29	219,03	52,468	-1,76E-11



Tabella B.2. Parametri recuperati.

indice	Frequenza [Hz]	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
301	119,34	212,72	51,643	-1,06E-11
302	119,49	167,76	-32,288	1,08E-11
303	119,54	215,32	44,47	8,61E-12
304	119,61	199,14	57,889	-6,15E-11
305	119,7	197,88	30,62	-1,63E-13
306	119,82	207,78	54,942	-2,02E-11
307	119,92	243,4	-18,004	-2,21E-11
308	120,02	4,5206	-75,01	-5,27E-11
309	120,35	104,5	-63,524	2,29E-11
310	121,21	52,589	-28,712	1,09E-11
311	121,64	341,38	-13,569	-4,75E-11
312	122,29	3,745	19,793	3,62E-12
313	122,41	67,075	65,221	-2,84E-11
314	122,5	20,254	-43,272	4,21E-12
315	122,72	303,97	-63,834	4,62E-12
316	123,16	10,484	-26,643	6,01E-12
317	123,37	255,03	-13,741	-2,86E-11
318	123,8	260,11	42,592	-3,53E-12
319	124,45	81,033	-18,483	-3,14E-11
320	124,88	56,167	26,8	2,23E-11
321	125,23	331,81	-10,882	-2,76E-12
322	125,31	159,78	-53,559	1,03E-13
323	125,37	323,35	18,115	-6,47E-11
324	125,43	328,07	0,64572	-8,64E-11
325	125,61	323,8	13,313	-2,49E-11
326	125,74	178,67	-33,286	-5,95E-11
327	126,17	4,4971	55,307	1,80E-11
328	126,39	114,41	-52,553	2,66E-11
329	126,82	49,992	-27,787	2,56E-11
330	126,95	343,8	65,532	-3,34E-11

**Tabella B.2.** Parametri recuperati.

<b>indice</b>	<b>Frequenza [Hz]</b>	$\lambda$ [rad]	$\beta$ [rad]	$\dot{\mathbf{f}}$ [Hzs <sup>-1</sup> ]
331	127,03	17,753	-16,775	-6,84E-11
332	127,25	148,86	-12,04	-4,77E-12
333	127,47	142,29	1,1835	1,32E-11

## Bibliografia

- [1] J. Aasi et al. «Einstein@Home all-sky search for periodic gravitational waves in LIGO S5 data». In: *Phys. Rev. D* 87 (4 feb. 2013), p. 042001. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.042001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.042001). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.042001>.
- [2] J. Aasi et al. «First low frequency all-sky search for continuous gravitational wave signals». In: *Phys. Rev. D* 93 (4 feb. 2016), p. 042007. DOI: [10.1103/PhysRevD.93.042007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.042007). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.042007>.
- [3] B. P. Abbott et al. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». In: *Phys. Rev. Lett.* 116 (6 feb. 2016), p. 061102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [4] B. P. Abbott et al. «Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO and Advanced Virgo». Ver. v3. In: *Living Reviews in Relativity* (2016). DOI: [10.1007/lrr-2016-1](https://doi.org/10.1007/lrr-2016-1).
- [5] F. Acernese et al. «Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector». In: *Classical and Quantum Gravity* 32.2 (2015), p. 024001. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/32/i=2/a=024001>.
- [6] P. Astone, S. Frasca e C. Palomba. «The short FFT database and the peak map for the hierarchical search of periodic sources». In: *Classical and Quantum Gravity* 22.18 (2005), S1197. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=18/a=S34>.
- [7] P. Astone, S. Frasca e C. Palomba. «The short FFT database and the peak map for the hierarchical search of periodic sources». In: *Classical and Quantum Gravity* 22.18 (2005), S1197. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=18/a=S34>.
- [8] P. Astone, A. Colla, S. D'Antonio, S. Frasca e C. Palomba. «Method for all-sky searches of continuous gravitational wave signals using the frequency-Hough transform». In: *Phys. Rev. D* 90 (4 ago. 2014), p. 042002. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.042002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.042002). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.042002>.
- [9] C. Caprini et al. «Science with the space-based interferometer eLISA. II: gravitational waves from cosmological phase transitions». In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2016.04 (2016), p. 001. URL: <http://stacks.iop.org/1475-7516/2016/i=04/a=001>.
- [10] A. Einstein. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1. 688, 1916.
- [11] R. Hulse e J. Taylor. «Discovery of a Pulsar in a Close Binary System.» In: *Bulletin of the American Astronomical Society* 6 (1974).

- [12] M. Kramer e N. Wex. «The double pulsar system: a unique laboratory for gravity». In: *Classical and Quantum Gravity* 26.7 (2009), p. 073001. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/26/i=7/a=073001>.
- [13] P. Leaci, the LIGO Scientific Collaboration e the Virgo Collaboration. «Searching for continuous gravitational wave signals using LIGO and Virgo detectors». In: *Journal of Physics: Conference Series* 354.1 (2012), p. 012010. URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/354/i=1/a=012010>.
- [14] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Theory and Experiments*. A cura di O. Oxford. Volume 1 voll. 2007. ISBN: 0198570740.
- [15] D. Pascucci. «Interferometric measurement of the Quality factor for test masses of Virgo». Laurea Magistrale in Astrofisica e Scienze dello Spazio. Università degli Studi di Napoli "Federico II", 2012/2013.
- [16] M. Punturo et al. «The third generation of gravitational wave observatories and their science reach». In: *Classical and Quantum Gravity* 27.8 (2010), p. 084007. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/27/i=8/a=084007>.
- [17] Schutz. «Gravitational wave sources and their detectability». In: *Classical and Quantum Gravity* 6.12 (1989), pp. 1761–1780.
- [18] J. Taylor e J. Weisberg. «A new test of general relativity. Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16». In: *Astrophysical Journal* (253 1982), pp. 908–920. DOI: [10.1086/159690](https://doi.org/10.1086/159690).
- [19] V. Ferrari e L. Gualtieri. «General Relativity». 2010.
- [20] J. Weber. «Evidence for Discovery of Gravitational Radiation». In: *Phys. Rev. Lett.* 22 (24 giu. 1969), pp. 1320–1324. DOI: [10.1103/PhysRevLett.22.1320](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.1320). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1320>.