

DECIMAZIONE E RICOSTRUZIONE DELLA BANDA OTTIMA DI AURIGA

A. ORTOLAN, G. VEDOVATO

I.N.F.N. Laboratori Nazionali di Legnaro

A cura del servizio
Documentazione dei
L.N.L.

DECIMAZIONE E RICOSTRUZIONE DELLA BANDA OTTIMA DI AURIGA

A. ORTOLAN, G. VEDOVATO

I.N.F.N. Laboratori Nazionali di Legnaro

A cura del servizio
Documentazione dei
L.N.L.

I dati di un rivelatore di onde gravitazionali risonante contengono l'informazione che riguarda il segnale gravitazionale in una zona ristretta dello spettro: ad esempio per il goal di AURIGA si stima di avere una banda di qualche decina di Hz attorno alla frequenza di un KHz¹. Il campionamento veloce $v_c = 4882.8125 \text{ Hz}$ dei dati provenienti dall'antenna², se da un lato garantisce la linearità del segnale acquisito (18 bit di risoluzione), la ricostruzione della fase del segnale con una precisione di $\approx 10^{-3} \text{ rad}$ ad un KHz, la possibilità di controllare diverse zone dello spettro (modi flessurali e torsionali e seconda armonica longitudinale della barra), dall'altro ha l'inconveniente di produrre $\approx 1.7 \text{ GBytes}$ di dati al giorno che sono difficilmente trattabili. Occorre trovare dei sistemi di compressione di tali dati che conservi l'informazione completa per quanto riguarda il segnale gravitazionale: la sua ampiezza, il suo tempo d'arrivo ed eventualmente le ampiezze delle componenti principali dell'espansione di Karhunen-Loeve³ nel caso di eventi con elevati rapporti segnale/rumore (SNR). Esiste un metodo efficiente di compressione dei dati antenna dopo il filtraggio con il filtro ottimo di Wiener adattato ad un segnale di tipo δ in ingresso all'antenna². Tale filtro viene applicato in linea ai dati campionati (dati RAW) e si compone di una parte che sbianca il rumore $M^c(\omega)$ (filtro causale), ed una parte che seleziona una banda del rumore sbiancato $M^A(\omega)$ (filtro acausale) come schematizzato in Fig. 1.

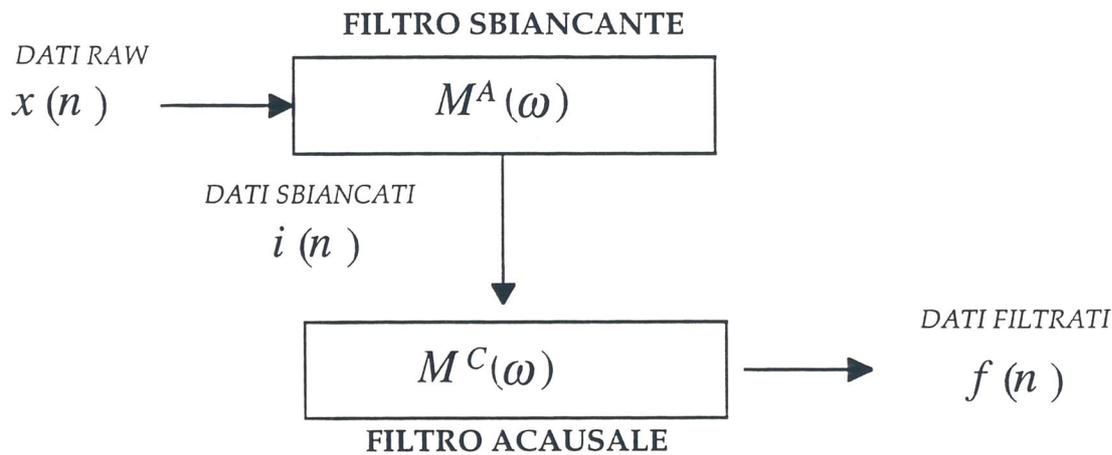


Fig. 1

Schema a blocchi dell'operazione di filtraggio "on-line"

Nel dominio della frequenza le due parti del filtro sono rispettivamente

$$M^C(\omega) \equiv \prod_{k=1}^{N_p} \frac{(p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}{(q_k + i\omega)(q_k - i\omega)} \quad (1)$$

e

$$M^A(\omega) \equiv \prod_{k=1}^{N_p} \frac{-i\omega}{(q_k^* - i\omega)(q_k^* + i\omega)} \quad (2)$$

dove, p_k e q_k sono N_p parametri del filtro che vengono determinati da una procedura di calibrazione dell'antenna; fisicamente questi parametri corrispondono ai poli ed agli zeri dello spettro di rumore dell'antenna.

Come si puo' vedere in Fig. 2 il filtro $M^A(\omega)$ e' un filtro passa banda che seleziona in un intorno della frequenza dei modi dell'antenna la parte dello spettro che contiene tutta l'informazione gravitazionale. Dopo l'applicazione di questo filtro i dati risultano limitati in banda e per un'antenna ultracriogenica della classe di AURIGA, possiamo aspettarci una banda passante di diciamo 50 Hz attorno ad un KHz. Si dimostra che per un segnale limitato in banda e' possibile sottocampionare i dati senza demodulare il segnale con un lock-in.

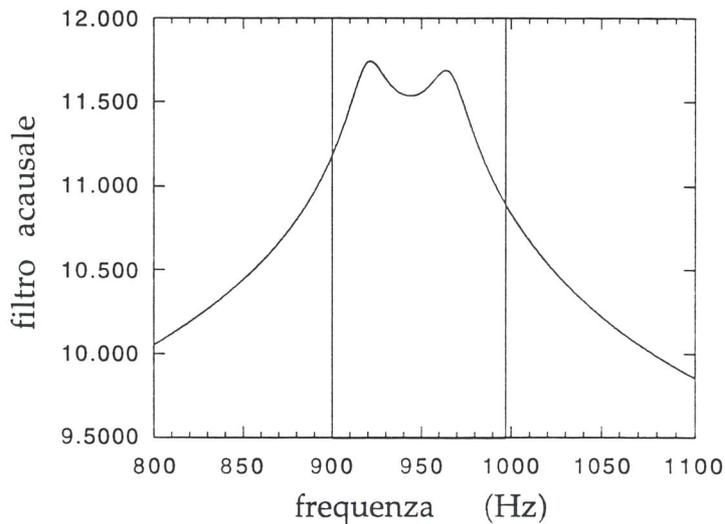


Fig. 2

Funzione di trasferimento del filtro di Wiener acausale corrispondente al goal di AURIGA. L'attenuazione del filtro e di circa

1 ordine di grandezza (20 db) entro la banda indicata

Se l'informazione spettrale del segnale gravitazionale e' contenuta in una banda $m \frac{\pi v_c}{D} \leq \omega \leq (m+1) \frac{\pi v_c}{D}$, dove m e D (fattore di decimazione) sono due interi positivi, allora possiamo nel dominio del tempo discreto sottocampionare di D volte il segnale contenuto in quella banda e ricostruirlo esattamente⁴. In altre parole se $f(n)$ e' il segnale filtrato e digitalizzato il segnale sottocampionato alla frequenza $v_D = v_c / D$ risulta $f_D(n) = f(Dn)$ e il contenuto spettrale dei dati $f(n)$ risulta lo stesso di quello dei dati originari, solamente che lo spettro e' traslato verso l'origine dell'asse delle frequenze della quantita' $m \frac{\pi v_c}{D}$; la frequenza di centro banda, che nei dati originali era $\bar{\omega} = (2m+1) \frac{\pi v_c}{2D}$, nei dati decimati diviene $\bar{\omega}_D = \frac{\pi v_c}{2D}$. Nel caso di AURIGA essendo $\cong 920$ Hz il centro della banda di interesse, 4882.8125 Hz la frequenza di campionamento e pensando di prendere $\cong 100$ Hz di banda passante per il segnale filtrato risulta conveniente la scelta $D = 22$ e $m = 8$ che corrispondono alla banda [887 ÷ 997] Hz.

Dopo la decimazione abbiamo il segnale filtrato nella banda [0 ÷ 110] Hz. La compressione dei dati e' notevole in quanto passiamo ad un rate di 68 MBytes al giorno permettendo di tenere in linea alcuni mesi di dati filtrati da utilizzare per l'analisi "off-line". Da questa analisi avrebbe come lo studio dei segnali e la decidendo cosa archiviare successivamente nel "database" dell'esperimento. L'interpolazione dei dati sottocampionati $f_D(n)$, che permette di ricostruire il segnale originale campionato alla frequenza piu' alta, puo' essere eseguita nel dominio del tempo discreto mediante la formula⁴

$$f(n) = \sum_k f_D(k) \frac{\sin[(\pi/2)(n/D - k)]}{(\pi/2)(n/D - k)} \cos[(\pi/2)(2m+1)(n/D - k)] \quad (3)$$

Come esempio possiamo vedere come funziona la decimazione per un evento gravitazionale simulato con SNR=30. L'evento e' stato sottocampionato prendendo un campione ogni 22 dei dati originari. Applicando a questi dati la formula precedente si riottengono i campioni relativi alla frequenza di campionamento di partenza e il risultato e' riportato in Fig. 3; invece in Fig. 4 abbiamo riportato gli scarti tra i campioni originali dell'evento e quelli ricostruiti: come si vede dal grafico la differenza e' trascurabile se pensiamo che e' espressa in unita di SNR.

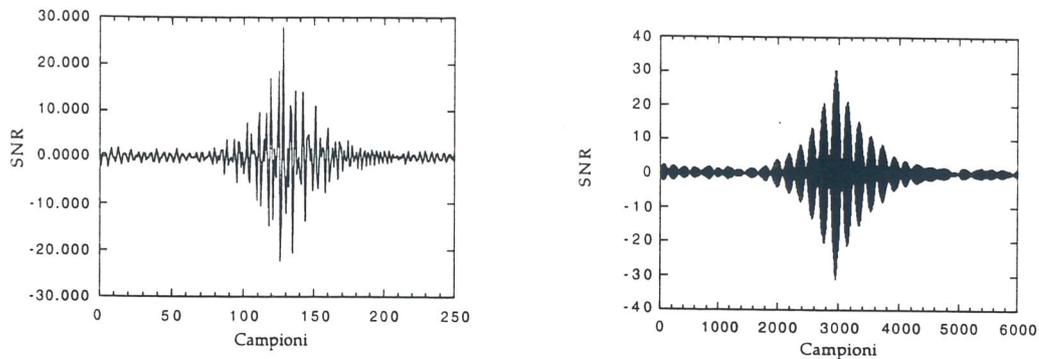


Fig. 3
*Evento gravitazionale decimato, Fattore di decimazione $D=22$,
 e ricostruzione dello stesso evento con l'interpolazione*

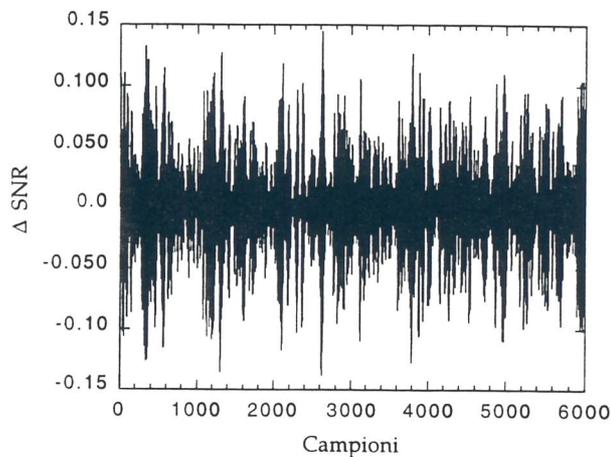


Fig. 4
*Differenza tra l'evento gravitazionale campionato a 4882.8125 Hz e il corrispondente
 evento ricostruito dai dati decimati con la formula di interpolazione.*

Abbiamo visto che l'effetto della decimazione nel dominio della frequenza e' quella di spostare la banda dei dati filtrati da $[887 \div 997] \text{ Hz}$ a $[0 \div 110] \text{ Hz}$. Questo ha delle conseguenze notevoli anche sull'implementazione di alcuni

algoritmi dell'analisi "on-line" quali l'applicazione del test del χ^2 ai dati filtrati e la possibilita' di riottenere i dati RAW dai dati filtrati allo scopo di applicare un nuovo filtro nel caso che il filtraggio originale sia stato fatto con i parametri non ottimi.

Il primo passo per utilizzare i dati decimati per i nostri scopi e' quello di ottenere i dati sbiancati decimati a partire dai dati filtrati decimati $f_D(n)$; Un modo conveniente consiste nel moltiplicare nel dominio della frequenza la

Trasformata di Fourier Discreta (DFT) $F_D(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_D(k) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$ $n = 0 \dots N-1$ dei

dati $f_D(n)$ per il reciproco del filtro acausale $1/M^A(\omega - \bar{\omega})$ che dobbiamo traslare della frequenza di centro banda $\bar{\omega}$. Si osservi che per i dati decimati e' possibile eseguire FFT che non sono affette dall'"aliasing" dovuto alla finestra temporale con un numero di campioni non molto elevato: da simulazioni si e' visto che sono sufficienti 2048 dati decimati per una banda del segnale filtrato di una decina di Hz. Se N e' la lunghezza della FFT allora, nel dominio della frequenza i dati sbiancati decimati, si possono ottenere dal seguente rapporto:

$$I_D(n) = \frac{F_D(n)}{M^A\left(\frac{\pi v_c}{D} \left[\frac{2n-N}{2N} - m - \frac{1}{2} \right]\right)} \quad n = 0 \dots N-1 \quad (4)$$

Si noti che applicando il filtro $1/M^A(\omega - \bar{\omega})$ nel dominio della frequenza ai dati sottocampionati abbiamo una quantita' di "aliasing" trascurabile anche se il filtro non e' limitato in banda. I dati $I_D(n)$ hanno spettro di potenza bianco e coincidono, una volta che sono stati traslati in frequenza, con la DFT $I(n)$ dei dati sbiancati (output del filtro sbiancante) nella banda originaria. Mediante una FFT inversa possiamo ottenere i dati sbiancati decimati nel dominio del tempo

$$i_D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} I_D(k) e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \quad n = 0 \dots N-1 \quad (5)$$

che come vedremo possono essere utilizzati sia per il ripristino dei dati RAW, nella banda del segnale gravitazionale, che per il calcolo del χ^2 .

i) Ricostruzione dei dati RAW

Inserendo $D-1$ zeri ogni dato sbiancato decimato si ottiene la sequenza

$$i_s(n) = \begin{cases} i(n/D) & \text{se } \text{mod}(n, D) = 0 \\ 0 & \text{se } \text{mod}(n, D) \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

(dati bianchi sovracampionati) che possiamo dare come input al filtro innovazione $[M^C(\omega)]^{-1} \equiv \prod_{k=1}^{N_p} \frac{(q_k + i\omega)(q_k - i\omega)}{(p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}$ il cui modulo e' riportato in Fig. 5.

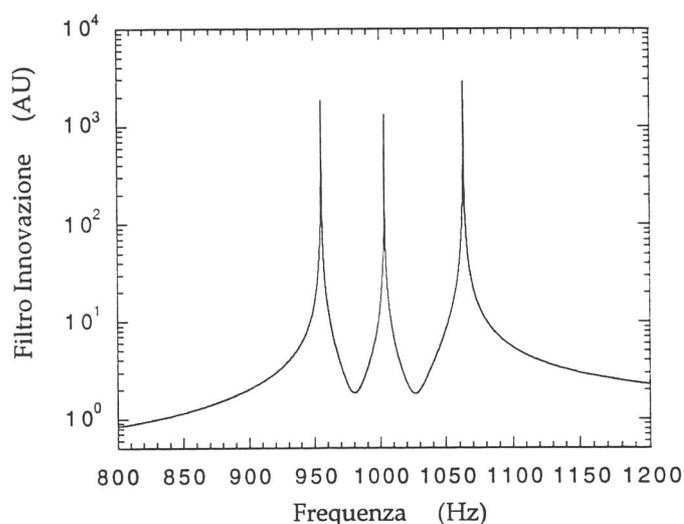


Fig. 5

Filtro innovazione con i parametri del goal di AURIGA.

L'uscita di questo filtro causale, che si puo' realizzare mediante N_p formule ricorsive ARMA applicate in cascata

$$\begin{aligned}
 y_k(n) &= -\sum_{i=1}^2 A_k^i y_k(n-i) + \sum_{i=0}^2 B_k^i y_{k-1}(n-i) \quad k = 1 \dots N_p \\
 y_0(n) &\equiv i_s(n) \quad (\text{dati sbiancati sovracampionati}), \\
 x_s(n) &\equiv x_{N_p}(n) \quad (\text{dati RAW ricostruiti})
 \end{aligned} \tag{8}$$

dove $A_k^0 = 1$, $A_k^1 = -2 \exp(-\text{Re}\{q_n\}T) \cos(\text{Re}\{q_n\}T)$, $A_k^2 = \exp(-2 \text{Re}\{q_n\}T)$, $B_k^0 = 1$, $B_k^1 = -2 \exp(-\text{Re}\{p_k\}T) \cos(\text{Im}\{p_k\}T)$ e $B_k^2 = \exp(-2 \text{Re}\{p_k\}T)$, rappresenta i dati RAW $x_s(n)$ ricostruiti esattamente nella banda del segnale antenna e campionati alla frequenza di campionamento originaria. Infatti la decimazione dei dati filtrati ha cancellato l'informazione spettrale dei dati RAW in zone dello spettro diverse da quella selezionata. Comunque nel caso non siano stati stimati correttamente i

parametri p_k e q_k , i dati RAW possono essere filtrati da un altro filtro di Wiener, diverso da quello di partenza, senza dovere rianalizzare i dati RAW originali registrati nelle cassette.

ii) calcolo del χ^2

Per il calcolo del χ^2 ridotto si deve utilizzare la formula⁵

$$\chi^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{n=1}^N \frac{i^2(n)}{\sigma_i^2} - \frac{A^2}{\sigma_f^2} \right] \quad (9)$$

dove A e' la stima dell'ampiezza dell'evento (massimo valore dell'uscita del filtro di Wiener), σ_f^2 e' la varianza dei dati filtrati e σ_i^2 e' la varianza dei dati sbiancati; il rapporto segnale rumore (SNR) e' definito come $\text{SNR} \equiv A / \sigma_f$; l'eq. (9) e' valida per quei dati che seguono le proprieta' del modello con cui e' stato ricavato il filtro di Wiener: rumore bianco e poli semplici. I dati decimati, rappresentando solo l'intervallo di frequenze del segnale gravitazionale, hanno la proprieta' di seguire il modello. L'eq (9) puo' essere scritta in termine dei soli dati decimati nel modo seguente

$$\chi_D^2 = \frac{1}{N_w - 1} \left[\sum_{n=1}^{N_w} \frac{i_D^2(n)}{\sigma_{i_D}^2} - \frac{A^2}{\sigma_{f_D}^2} \right] \quad (10)$$

dove N_w e' il numero di campioni decimati corrispondenti al tempo ottimo di Wiener definito come $\tau_w \equiv 1 / \max_k (2 \text{Re}\{q_k\})$; Questa scelta di N_w e' ottima nel senso che considera i dati sbiancati nella zona dove e' anche presente il segnale.

In presenza di puro rumore gaussiano la relazione tra la varianza dei processi

$f_D(n)$ e $i_D(n)$ e' semplice da calcolare: indicato con $\Gamma^2 \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |M^A(\omega)|^2 d\omega$ il fattore

di normalizzazione del filtro acausale analogico abbiamo $\sigma_{i_D}^2 = \Gamma^2 \sigma_{f_D}^2$ per cui nel calcolo del χ^2 possiamo utilizzare solamente la varianza dei dati sbiancati

$\sigma_{i_D}^2(n) \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N i_D^2(k)$ che risulta piu' semplice da stimare essendo i dati non correlati e quindi, essendo gaussiano il rumore, indipendenti; in pratica si dovrebbero utilizzare $N = 10^4$ dati per rendere l'errore relativo sulla stima di σ_{i_D} (che e' circa $1/\sqrt{2N}$) sufficientemente piccolo. La costante di normalizzazione dipendendo solamente dai poli q_k di $|M^A(\omega)|^2$ di si ricava analiticamente con il

calcolo dei residui. Abbiamo dunque costruito il seguente algoritmo che permette una stima di χ^2 per ogni dato decimato

$$\chi_D^2 = \frac{1}{(N_W - 1)\sigma_{i_D}^2} \left[\sum_{n=1}^{N_W} i_D^2(n) - \Gamma^2 A^2 \right] \quad (11)$$

Gli errori che si compiono nell'applicare questo algoritmo sono imputabili alla stima di $\sigma_{i_D}^2$ e di Γ nel caso si sia eseguito il filtraggio con parametri non ottimi. Il punto cruciale è comunque la stima corretta di $\sigma_{i_D}^2$: un eventuale errore sulla stima di $\sigma_{i_D}^2$ si riflette direttamente sul valore di χ^2 degli eventi e quindi sulla possibilità di discriminare gli eventi spuri da quelli provenienti dall'antenna. Una possibilità per la stima di $\sigma_{i_D}^2$ è la istogrammazione dei dati sbiancati decimati e il successivo "fit" di questo istogramma con una curva gaussiana: la varianza ricavata dal "fit" non dovrebbe risentire di eventuali spuri presenti nei dati.

Bibliografia

- ¹ M. Cerdonio et Al. *Status of the AURIGA Gravitational Wave Antenna and Perspectives for the Gravitational Waves Search with Ultracryogenic Resonant Detectors*, in First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments, E. Coccia, G. Pizzella e F. Ronga Eds (World Scientific - Singapore -1995), p. 176.
- ² S. Vitale et Al., *Fully Numerical Data Analysis for Resonant Gravitational Wave Detectors: Optimal Filter and Available Information*, First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave experiments, Eds E. Coccia, G. Pizzella e F. Ronga (World Scientific - Singapore -1995), p. 220.
- ³ A. Ortolan et Al. *Phys Rev D* **50** (1994) 4737.
- ⁴ J. G. Proakis e D. G. Manolakis *"Digital Signal Processing"*. (Macmillan New York 1988).
Si noti che se m è dispari c'è una inversione della parte a frequenza negativa dello spettro che può essere corretta moltiplicando ciascun campione del segnale decimato per $(-1)^n$.
- ⁵ S. Vitale et Al., *Fast Numerical Data Analysis for Resonant Gravitational Wave Antennas and Antennas Arrays: optimal filtering, signal timing and internal vetoes*, *Nucl. Phys B* (to be published)

