



Laboratori Nazionali di Legnaro

REIEZIONE DEGLI SPURI E TEST DEL χ^2 PER L'ANTENNA GRAVITAZIONALE AURIGA

A. Ortolan, G. Vedovato

*Laboratori Nazionali di Legnaro Via Romea ,4
I-35020 Legnaro, Padova, Italy.*

S. Vitale

*Dipartimento di Fisica, Universita' di Trento
I-38050, Povo, Trento, Italy.*

A cura del servizio
Documentazione dei
L.N.L.

REIEZIONE DEGLI SPURI E TEST DEL χ^2 PER L'ANTENNA GRAVITAZIONALE AURIGA

A. Ortolan, G.Vedovato

*Laboratori Nazionali di Legnaro Via Romea ,4
I-35020 Legnaro, Padova, Italy.*

S. Vitale

*Dipartimento di Fisica, Universita' di Trento
I-38050, Povo, Trento, Italy.*

A cura del servizio
Documentazione dei
L.N.L.

1. Introduzione e Modello Proposto

Il segnale di un'antenna gravitazionale contiene eventi che si classificano come "extra noises" o "spuri" in quanto la loro energia non è compatibile con la distribuzione "boltzmaniana" relativa al solo rumore gaussiano (termico e dell'elettronica di amplificazione) presente nel rivelatore¹. Si possono fare diverse ipotesi sull'origine di questi eventi: perdita di carica istantanea del trasduttore, disturbi elettromagnetici sulle linee che portano il segnale dal trasduttore allo SQUID, movimento di flussoni nello schermo che contiene il trasformatore superconduttore e movimenti relativi tra lo schermo e l'avvolgimento primario del trasformatore, raggi cosmici ecc. Nell'ambito del modello linearizzato dell'antenna² possiamo pensare che gli eventi "extra noise" abbiano origine nelle diverse parti che compongono il modello e classificare gli eventi come

- evento spurio antenna (meccanico)
- evento spurio trasduttore (meccanico)
- evento spurio risonatore (elettromagnetico)
- evento spurio elettrico (elettromagnetico)

a seconda che l'origine sia di tipo meccanico dall'antenna o dal trasduttore, oppure elettromagnetica dalla linea che porta il segnale dal trasduttore allo SQUID, o dalla catena di amplificazione dopo lo SQUID. In Fig. 1 è riportato lo schema di un'antenna gravitazionale che evidenzia i diversi punti dell'antenna dove possono avere origine gli spuri.

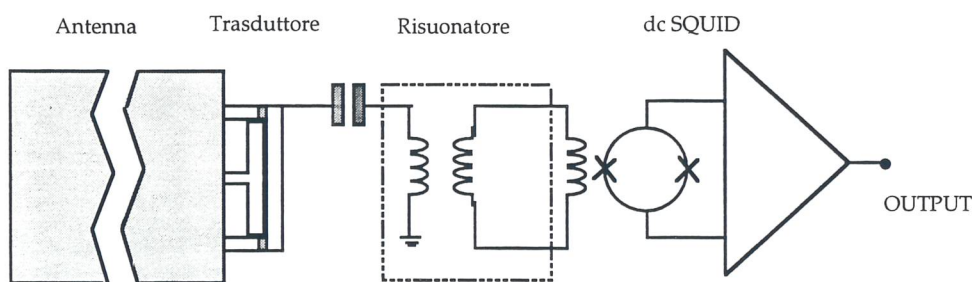


Fig. 1

Schema a blocchi di un'antenna gravitazionale amplificata con un dc SQUID con le zone del rivelatore dove possono avere origine eventi spuri.

Se di questi eventi prendiamo in considerazione solo gli effetti lineari nel sistema possiamo utilizzare le equazioni che regolano la dinamica dell'antenna in regime lineare ricavate in [2] ed in particolare il modello linearizzato che impiega gli equivalenti elettrici per la parte meccanica. In questo schema ciascun evento spurio e' rappresentabile con un generatore di tensione posizionato opportunamente nel circuito equivalente (vedi Fig. 2). La tensione equivalente causata da un evento spurio dipende da molti parametri e non e' praticamente calcolabile. In ogni modo di questi eventi ci interessa solamente il rapporto segnale/rumore dopo il filtraggio e quindi non la loro energia assoluta ma quella relativa ad un evento gravitazionale con lo stesso SNR e nel seguito utilizzeremo la grandezza SNR per normalizzare le ampiezze in Volt dei generatori di d.d.p. che rappresentano eventi spuri.

Le funzioni di trasferimento degli eventi spuri si possono dunque ricavare scrivendo le equazioni per le maglie o i nodi del circuito di Fig. 2 e, poiche' si tratta di una rete in cui sono presenti solo elementi lineari, tali funzioni di trasferimento sono rappresentabili come prodotti di poli e zeri semplici nel piano complesso $s = \tau + i\omega$ delle trasformate di Laplace. Queste funzioni rappresentano la risposta in frequenza del sistema per un evento spurio impulsivo. In notazione matriciale le equazioni del circuito si scrivono

$$\mathbf{M}(\omega)\mathbf{I}^T(\omega) = \mathbf{V}^T(\omega), \quad (1)$$

dove $\mathbf{V}(\omega) \equiv [-V_{ant}(\omega) + V_{tra}(\omega), V_{tra}(\omega), V_{ris}(\omega), 0, V_{el}(\omega)]$ e $\mathbf{I}(\omega) \equiv [I_1(\omega), I_2(\omega), I_3(\omega), I_4(\omega), I_5(\omega),]$ sono rispettivamente le trasformate di Fourier delle sorgenti di differenze di potenziale relative ai segnali e delle correnti mente

$$\mathbf{M}(\omega) = \begin{bmatrix} R_1 + i\omega L_1 + \frac{1}{i\omega C_1} & -R_2 - \frac{1}{i\omega C_2} - \frac{1}{i\omega C_0} & -\frac{I_3}{i\omega C_0} & 0 & 0 \\ i\omega L_2 & R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} + \frac{1}{i\omega C_0} + i\omega L_2 & \frac{1}{i\omega C_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega C_0} & R_3 + i\omega L_3 + \frac{1}{i\omega C_0} & i\omega M & 0 \\ 0 & 0 & i\omega M & i\omega L_4 + Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ 0 & 0 & 0 & Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

e' la matrice di impedenza totale del sistema; in quest'ultima equazione $Z_{ij}(\omega)$ e la matrice di impedenza associata all'amplificatore lineare (dc SQUID o amplificatore FET) pensato come un elemento quadripolare.

Da questo sistema di equazioni lineare, che possiamo risolvere ad esempio con il metodo di Kramer, si ricava la corrente $I_5(\omega)$ relativa alla maglia di uscita

$$I_5(\omega) = \frac{\|M_I(\omega)\|}{\|M(\omega)\|}, \quad (2)$$

dove $M_I(\omega)$ e la matrice ottenuta sostituendo l'ultima colonna di $M(\omega)$ con $V^T(\omega)$. Le funzioni di trasferimento di ogni evento spurio $H_\alpha(\omega)$, dove $\alpha = ant, tra, ris, ele$ e' l'etichetta che distingue i diversi tipi di spuri, si ricavano dalla equazione

$$H_\alpha(\omega) = Z_L(\omega)I_5(\omega), \quad (3)$$

dove sono stati annullati tutti i generatori di differenza di potenziale tranne l' α -esimo che e' stato posto pari a 1. Si noti la funzione di trasferimento del segnale gravitazionale coincide con la funzione di trasferimento di segnali spuri di tipo antenna meccanico, per cui il solo modo per vetare questo tipo di eventi spuri sono i protocolli di anti-coincidenze locali con eventi sismici o acustici registrati dalla apposita strumentazione per il controllo delle variabili ambientali, oppure anti-coincidenze con altre antenne gravitazionali.

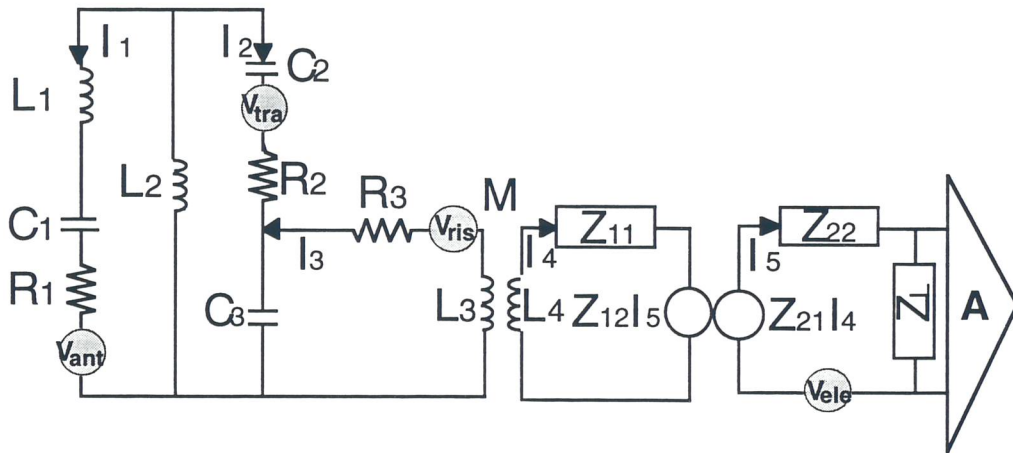


Fig. 2

Schema elettrico equivalente di un'antenna gravitazionale relativo al modello linearizzato. In grigio sono segnati i generatori di potenziale equivalenti ai differenti tipi di spuri.

In un intorno delle frequenze dove e' presente il segnale gravitazionale, qualunque sia l'amplificatore utilizzato ed i filtri analogici impiegati, le funzioni di trasferimento si possono approssimare (a parte una costante moltiplicativa completamente ininfluyente) come

$$H_\alpha(\omega) = \frac{(i\omega)^{N_p - N_0} \prod_{k=1}^{N_0} (q_k^\alpha + i\omega)(q_k^\alpha - i\omega)}{\prod_{k=1}^{N_p} (p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}, \quad (4)$$

dove N_p e' il numero di poli p_k che coincide con il numero di oscillatori presenti nel sistema ($N_p=2$ per il sistema antenna e trasduttore con amplificatore FET, $N_p=3$ per il sistema antenna, trasduttore, risonatore elettrico e dc SQUID), N_Q e' il numero di zeri q_k^α della funzione di trasferimento (ad es. $N_Q=0$ per un segnale meccanico proveniente dall'antenna e $N_Q=1$ per un segnale meccanico dal trasduttore). E' utile notare che i poli sono gli stessi per tutte le funzioni di trasferimento mentre il numero ed il valore degli zeri cambiano a seconda del tipo di funzione di trasferimento e che $H_{ant}(\omega)$ presenta solamente uno zero N_p -volte degenere per $\omega=0$. I segnali di tipo impulsivo all'uscita dell'antenna si possono rappresentare nel dominio della frequenza come

$$O(\omega) = AH_a(\omega) + \eta(\omega) \quad (5)$$

dove A e' l'ampiezza del segnale ed $\eta(\omega)$ e' un processo stocastico gaussiano a media nulla che rappresenta il rumore totale nell'antenna. Lo spettro di potenza di $\eta(\omega)$, definito dalla relazione $\langle \eta(\omega) \eta(\omega') \rangle = S(\omega) \delta(\omega - \omega')$, con $\langle \dots \rangle$ media di "ensemble", si puo' fattorizzare nel modo seguente

$$S(\omega) = S_0 \frac{\prod_{k=1}^{N_p} (q_k + i\omega)(q_k - i\omega)(q_k^* + i\omega)(q_k^* - i\omega)}{\prod_{k=1}^{N_p} (p_k + i\omega)(p_k - i\omega)(p_k^* + i\omega)(p_k^* - i\omega)}, \quad (6)$$

dove S_0 e' una costante.

Si noti che gli N_p zeri q_k di $S(\omega)$ non sono in relazione con gli zeri q_k^α delle funzioni di trasferimento dei segnali: essi derivano dalla fattorizzazione dello spettro $S(\omega)$ che puo' essere scritto come la somma di un contributo di rumore costante S_0 (rumore a banda larga dell'elettronica) e i contributi di rumore a banda stretta di ciascun modo del sistema (contributo termodinamico e di back-action dell'amplificatore):

$$S(\omega) = S_0 + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{a_k}{(p_k + i\omega)} + \frac{a_k^*}{(p_k^* + i\omega)} + \frac{a_k}{(p_k - i\omega)} + \frac{a_k^*}{(p_k^* - i\omega)}, \quad (7)$$

dove, in presenza di puro rumore termico e di back-action $a_k = \left[2k_B T_k^{eq} R_k \frac{\text{Im}\{p_k\}}{2\text{Re}\{p_k\}} \right] i p_k^*$ con k_B costante di Boltzmann, R_k e T_k^{eq} rispettivamente resistenza equivalente e temperatura equivalente del modo k -esimo³. La resistenza equivalente di un modo e' definita come il massimo della parte reale dell'impedenza del sistema vista dall'amplificatore. Inoltre la temperatura equivalente del modo e' data

dalla somma della temperatura termodinamica e quella di back-action dovuta alla corrente di rumore dell'amplificatore che innalza la temperatura del modo $T_k^{eq} = T + T_k^{back-action}$.

2. Filtraggio dei Dati

Al segnale di un antenna gravitazionale viene applicato il filtro ottimo di Wiener che rende massimo il rapporto segnale/rumore (SNR) per un segnale proveniente dall'antenna (vedi schema in Fig. 3). L'uscita di questo filtro rappresenta la migliore stima dell'ampiezza di un segnale impulsivo in ingresso all'antenna e viene applicato continuamente a tutti i dati $o(t)$ in uscita e pertanto anche agli eventuali segnali spuri presenti.

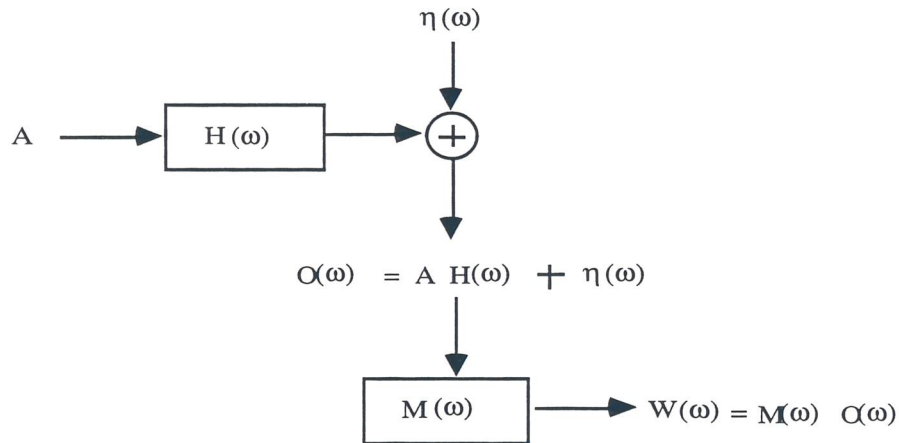


Fig. 3

Schema a blocchi dell'operazione di filtraggio; $H(\omega)$ funzione di trasferimento del segnale; $M(\omega)$ maschera di Wiener

Nel dominio della frequenza l'operazione di filtraggio si scrive [3]

$$W(\omega) = M(\omega)O(\omega), \quad (8)$$

dove

$$M(\omega) \equiv \sigma_A^2 \frac{H_{ant}^*(\omega)}{S(\omega)} = \sigma_A^2 \prod_{k=1}^{N_p} \frac{-i\omega(p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}{(q_k + i\omega)(q_k^* - i\omega)(q_k - i\omega)(q_k^* + i\omega)} \quad (9)$$

e' la maschera da applicare al segnale e σ_A e' l'errore che si compie nella stima della ampiezza A dell'impulso $\sigma_A \equiv \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_{ant}(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega \right]^{-1/2}$. E' utile notare che questo integrale si puo' calcolare analiticamente

osservando che la funzione integranda

$W(\omega) \equiv \frac{|H_{ant}(\omega)|^2}{S(\omega)} = \prod_{k=1}^{N_p} \frac{\omega^2}{(q_k + i\omega)(q_k^* - i\omega)(q_k - i\omega)(q_k^* + i\omega)}$ si puo' scomporre in una somma di frazioni semplici

$$W(\omega) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{w_k}{(p_k + i\omega)} + \frac{w_k^*}{(p_k^* + i\omega)} + \frac{w_k}{(p_k - i\omega)} + \frac{w_k^*}{(p_k^* - i\omega)} \quad (10)$$

dove i coefficienti w_k rappresentano il valore dei residui della funzione sui poli

$$\begin{aligned} w_k &\equiv \lim_{s \rightarrow q_k} (q_k - s)W(s) \\ &= \frac{1}{8 \operatorname{Re}\{q_k\} \operatorname{Im}\{q_k\}} \prod_{j \neq k}^{N_p} \frac{1}{(q_j + q_k)(q_j^* - q_k)(q_j - q_k)(q_j^* + q_k)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Applicando il teorema dei residui abbiamo che la varianza dell'uscita del filtro si puo' scrivere come

$$\sigma_A = \left[2 \sum_{k=1}^{N_p} \operatorname{Im}\{w_k\} \right]^{-1/2}. \quad (12)$$

Per implementare il filtraggio osserviamo che la maschera $M(\omega)$ si puo' fattorizzare nel modo seguente

$$M(\omega) = \sigma_A^2 \prod_{k=1}^{N_p} M_k^A(\omega) \prod_{k=1}^{N_p} M_k^C(\omega), \quad (13)$$

dove $M_k^A(\omega) \equiv \frac{-i\omega}{(q_k^* - i\omega)(q_k^* + i\omega)}$ e $M_k^C(\omega) \equiv \frac{(p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}{(q_k + i\omega)(q_k - i\omega)}$ sono

rispettivamente le parti causali ed acausali della maschera relative ad ciascun polo del sistema. Dimostriamo ora una proprieta' importante di $M(\omega)$, ovvero che la sua parte causale, a meno di una costante moltiplicativa, non e' altro che il filtro che sbianca il rumore totale all'uscita dell'antenna. A tale scopo e' sufficiente osservare che l'antenna e' rappresentabile come un sistema a fase minima (valgono infatti le condizioni di Paley-Wiener per $S(\omega)$ dato che si tratta di uno spettro razionale⁴) e che quindi si puo' fattorizzare la funzione

$\mathbf{S}(s) \equiv \int_0^\infty e^{-s\tau} \langle \eta(t) \eta(t + \tau) \rangle d\tau$ (trasformata di Laplace della funzione di

correlazione del rumore) come $\mathbf{S}(s) = \mathbf{L}(s)\mathbf{L}(-s)$ ovvero si puo' esprimere lo spettro di potenza del rumore come $S(\omega) \equiv \mathbf{S}(i\omega) = |\mathbf{L}(i\omega)|^2$; la funzione $\mathbf{L}(s)$ e' detta *filtro innovazione* che nel nostro caso risulta essere

$\mathbf{L}(s) = S_0^{1/2} \prod_{k=1}^{N_p} \frac{(q_k + s)(q_k - s)}{(p_k + s)(p_k - s)}$. In questo modo il processo stazionario $\eta(t)$

puo' essere pensato come l'uscita di un sistema causale che ha in ingresso un processo stocastico bianco e stazionario $i(t)$, noto come *innovazione* del processo $\eta(t)$, e una funzione di trasferimento pari a $\mathbf{L}(i\omega)$. Si noti che questo e' il metodo che abbiamo utilizzato in pratica per simulare un rumore con le proprieta' statistiche assegnate dal modello dell'antenna gravitazionale. La funzione inversa $\Gamma(s) \equiv \mathbf{L}^{-1}(s)$ e' detta *filtro sbiancante* dato che la sua uscita

$$i(\omega) = \Gamma(i\omega) \eta(\omega) \quad (14)$$

ha uno spettro bianco se in ingresso abbiamo il processo $\eta(\omega)$. Dalla definizione risulta, per un antenna gravitazionale risonante,

$$\Gamma(i\omega) = S_0^{-1/2} \prod_{k=1}^{N_p} \frac{(p_k + i\omega)(p_k - i\omega)}{(q_k + i\omega)(q_k - i\omega)} = S_0^{-1/2} \prod_{k=1}^{N_p} M_k^C(\omega),$$

che e' quanto volevamo dimostrare. Come vedremo in seguito possiamo utilizzare la proprieta' del processo $i(\omega)$ di non essere correlato correlato per costruire un algoritmo che implementi in modo efficiente il test del χ^2 sui dati filtrati. In Fig. 4 e 5 abbiamo riportato un esempio della funzione di trasferimento di un filtro sbiancante e della parte acausale della maschera per un rivelatore risonante con 3 poli che corrisponde al goal dell'esperimento AURIGA [1].

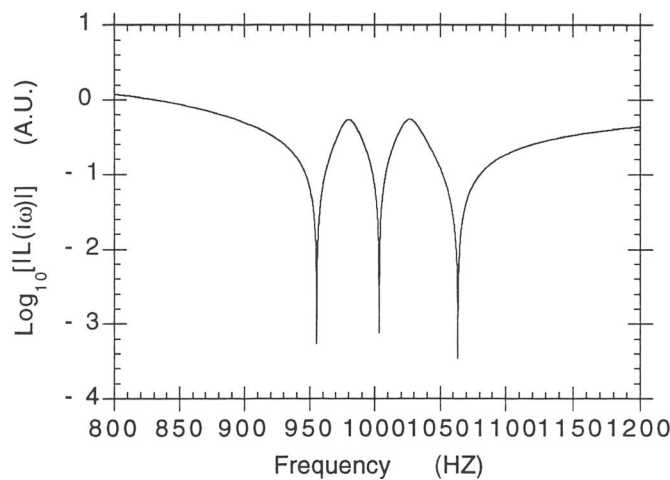


Fig. 4

Funzione di trasferimento del filtro sbiancante coincidente con la parte causale della maschera di Wiener .

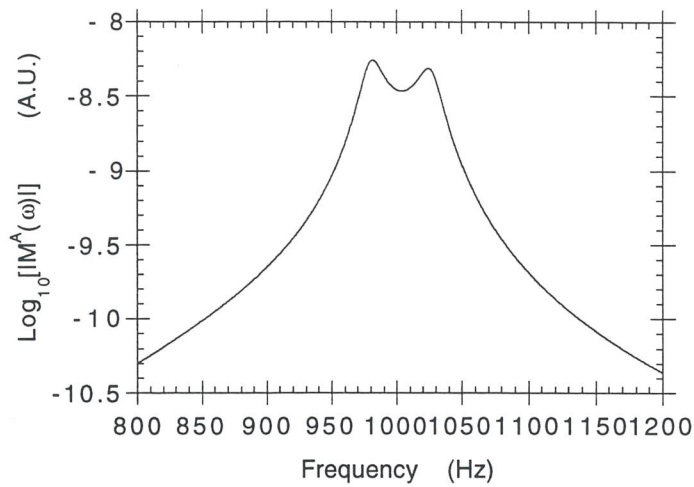


Fig. 5
*Funzione di trasferimento della parte acausale della
 maschera di Wiener .*

In pratica il filtraggio viene implementato mediante filtri digitali sui dati campionati $o_n \equiv o(nT)$ $n=1,2,3,\dots$, dove T e' il tempo di campionamento che, ad esempio, nel caso dell'antenna AURIGA e' pari a $204.8 \mu s$. Il filtraggio nel dominio del tempo discreto puo' essere separato in un certo numero di moduli di filtraggio, pari al numero di poli del sistema, composti come il filtro analogico da una parte causale ed una acausale.

Per trasformare i filtri analogici in filtri digitali occorre calcolare la trasformata z della funzione di trasferimento del filtro digitale. Nel caso della maschera di Wiener, se ne puo' ottenere l'espressione digitalizzata $M(z)$ mappando singolarmente ciascun polo p_k e ciascun zero q_k di $M(\omega)$ nel piano complesso z secondo la corrispondenza $z_k = \exp[p_k T]$ oppure $\hat{z}_k = \exp[q_k T]$. Indicate con $M_k^C(z)$ e $M_k^A(z)$ rispettivamente la parte causale ed acausale del filtro numerico che rappresenta la maschera nel discreto abbiamo, per ciascun polo del sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_k^C(z) = \frac{\sum_{i=0}^2 C_k^i z^{-i}}{\sum_{i=0}^2 P_k^i z^{-i}} \\ M_k^A(z) = \frac{\sum_{i=0}^1 A_k^i z^{-i}}{\sum_{i=0}^2 P_k^i z^{-i}} \end{array} \right. , \quad (15)$$

dove i coefficienti dei polinomi in z sono esprimibili in funzione dei poli e

degli zeri del sistema analogico mediante le semplici relazioni

$$\begin{cases}
 A_k^0 = 1 \\
 A_k^1 = -1 \\
 C_k^0 = 1 \\
 C_k^1 = -2 \exp(-\operatorname{Re}\{q_n\}T) \cos(\operatorname{Re}\{q_n\}T) \\
 C_k^2 = \exp(-2 \operatorname{Re}\{q_n\}T) \\
 P_k^0 = 1 \\
 P_k^1 = -2 \exp(-\operatorname{Re}\{p_k\}T) \cos(\operatorname{Im}\{p_k\}T) \\
 P_k^2 = \exp(-2 \operatorname{Re}\{p_k\}T)
 \end{cases} \quad (16)$$

Inizialmente ai dati campionati $o(n)$ possiamo dunque applicare in cascata gli N_p filtri causali $M_k^C(z)$ mediante le formule ricorsive ARMA

$$\begin{aligned}
 x_k(n) &= -\sum_{i=1}^2 P_k^i x_k(n-i) + \sum_{i=0}^2 C_k^i x_{k-1}(n-i) \quad k = 1 \dots N_p \\
 x_0(n) &\equiv o(n) \quad (\text{dati da filtrare}) \\
 i(n) &\equiv x_{N_p}(n) \quad (\text{output del filtro causale})
 \end{aligned} \quad (17)$$

che forniscono come output finale i dati sbiancati $i(n)$ che, in assenza di segnale, rappresentano l'innovazione del processo stocastico $\eta(n)$ in ingresso al filtro. E' facile mostrare infatti che $i(n)$ e' un processo stocastico a media nulla e correlazione $\langle i(n)i(m) \rangle = \sigma_i^2 \delta_{mn}$. Questi dati costituiscono l'ingresso della parte acausale del filtro che e' ancora esprimibile con formule ricorsive ARMA ma in questo caso i dati sono ordinati in modo inverso

$$\begin{aligned}
 y_k(n) &= -\sum_{i=1}^2 P_k^i y_k(n-i) + \sum_{i=0}^1 A_k^i y_{k-1}(n-i) \quad k = 1 \dots N_p \\
 y_0(n) &\equiv i(N-n) \quad (\text{input del filtro acausale}) \\
 f(n) &\equiv y_{N_p}(n) \quad (\text{dati filtrati})
 \end{aligned} \quad (18)$$

dove N e' il numero di dati campionati su cui si deve applicare il filtro. A questo punto il massimo valore dei dati filtrati $f(n)$ viene preso come la migliore stima dell'ampiezza di un segnale impulsivo in ingresso all'antenna mentre la posizione temporale del massimo (eventualmente ottenuta ricostruendo nel continuo il segnale campionato) rappresenta la migliore stima del tempo di arrivo dell'impulso⁵ (vedi Fig. 6).

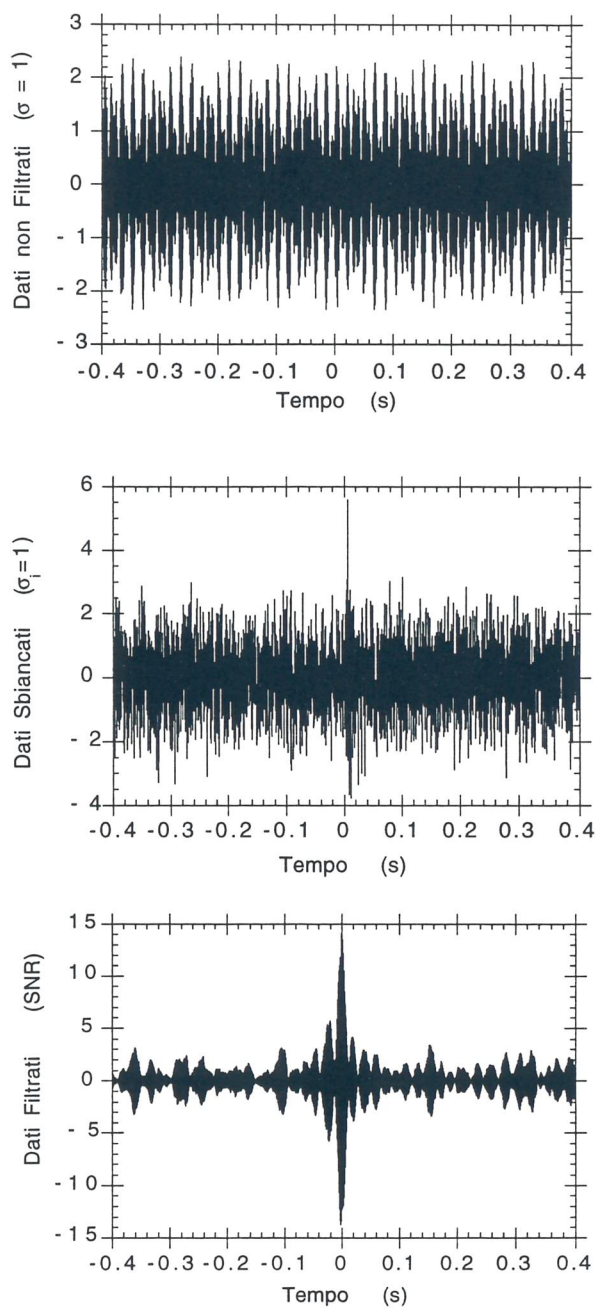


Fig. 6
 Filtraggio di un evento antenna di tipo impulsivo con i due filtri digitali descritti nel testo. SNR dopo il filtraggio pari a 14.5. Il tempo di arrivo del segnale è $t_0 = 0$

3. Simulazione di eventi spuri

Abbiamo simulato il segnale in uscita ad un'antenna con una banda post-detection di 50 Hz che corrisponde all'impiego di uno SQUID con una risoluzione di energia di $100 \hbar$, di un trasduttore con massa di 3 Kg, un trasformatore superconduttore di 10 H per l'avvolgimento primario e $2.6 \mu H$ per quello secondario ed infine una temperatura dell'antenna di 100 mK. Inoltre il fattore di merito dei modi meccanici e' 10^7 e le frequenze di risonanza della barra e del trasduttore non accoppiati sono pari ad 1 KHz.

I valori dei parametri p_k , q_k e q_k^α che provengono dalla soluzione numerica delle eq. (3) sono riportati nelle tabelle seguenti, per quanto riguarda il sia il rumore che le funzioni di trasferimento dei diversi tipi di segnali spuri.

k / <i>poli</i>	$\text{Re}\{p_k\}$	$\text{Im}\{p_k\}$	k / <i>zeri</i>	$\text{Re}\{p_k\}$	$\text{Im}\{p_k\}$
1	6002.6994	7.2×10^{-4}	1	5149.6172	1192.
2	6304.7906	5.7×10^{-4}	2	6157.4360	52.7
3	6681.8437	1.1×10^{-3}	3	6447.0921	57.3

Tabella 1

Fattorizzazione di $S(\omega)$ in poli e zeri per l'antenna AURIGA con i parametri ottimizzati.

k / <i>tra</i>	$\text{Re}\{q_k\}$	$\text{Im}\{q_k\}$
1	6277.8557	3.1×10^{-4}

k / <i>ris</i>	$\text{Re}\{q_k\}$	$\text{Im}\{q_k\}$
1	6146.1265	2.9×10^{-4}
2	6435.1692	3.2×10^{-4}

k / <i>ele</i>	$\text{Re}\{q_k\}$	$\text{Im}\{q_k\}$
1	5916.2372	7.0×10^{-2}
2	6261.5291	2.8×10^{-2}
3	6581.2457	5.2×10^{-2}

Tabella 2

Zeri delle funzioni di trasferimento del trasduttore, (un solo zero) risonatore (due zeri) e linea elettrica (tre zeri).

In Fig. 7, sono riportati tipici eventi antenna, trasduttore, risonatore simulati con $SNR \cong 15$ dopo il filtraggio. Come si puo' notare dai grafici, dopo il filtraggio i segnali spuri "trasduttore" e "risonatore" hanno una forma diversa dal segnale antenna e si puo' sfruttare questo fatto per trovare un algoritmo che permetta di vetarli autonomamente

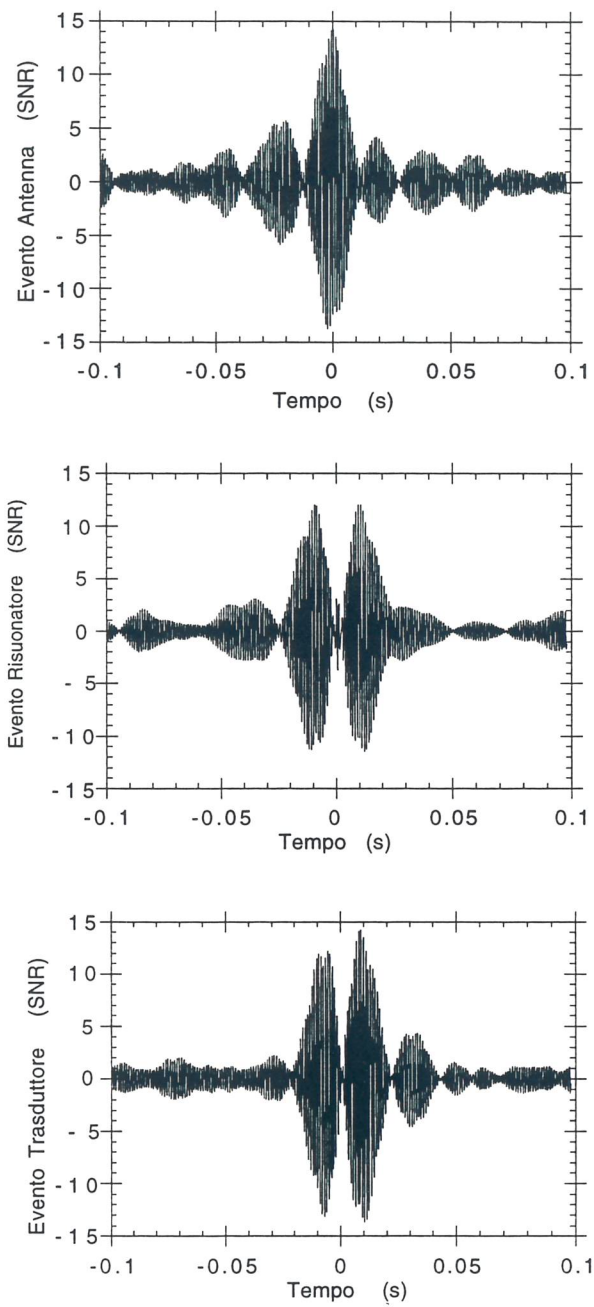


Fig. 7

Eventi spuri di tipo trasduttore e risonatore dopo il filtraggio confrontati con un evento antenna avente lo stesso rapporto segnale/rumore ($SNR \cong 15$)

4. Implementazione del Test del χ^2

Un algoritmo molto efficiente per la reiezione di questi spuri e' il test del χ^2 . Si puo' dimostrare [3] che questo test, che si applica direttamente sui dati digitalizzati, puo' essere suddiviso in due parti: sbiancamento dei dati con il filtro digitale sbiancante $\Gamma(i\omega) = S_0^{-1/2} \prod_{k=1}^{N_p} M_k^C(\omega)$ (che coincide con la parte causale del filtraggio di Wiener e quindi non richiede ulteriore potenza di calcolo (eq. (17)) e stima del χ^2 con la formula

$$\chi^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{i^2(n)}{\sigma_i^2} - \frac{A^2}{\sigma_A^2} \quad (19)$$

Il test e' stato effettuato su dati simulati per diversi valori di SNR sia per eventi di tipo antenna che spurio, eseguendo esattamente la procedura impiegata nel filtraggio reale dei dati descritta nel paragrafo precedente. I dati della simulazione relativi al rumore sono stati prodotti con un generatore di numeri casuali gaussiani con spettro bianco mandati in ingresso al filtro $L(z)$ ottenuto dal filtro analogico innovazione $\mathbf{L}(i\omega)$ con la tecnica standard di mappare poli e zeri del filtro analogico nel piano z . Il filtro numerico risultante e' un processo ARMA. I segnali sia antenna che spuri sono stati ottenuti digitalizzando le rispettive funzioni di trasferimento (eq. (14)) e mandando una delta all'ingresso di questi filtri.

Descriviamo ora la procedura seguita in pratica per il calcolo del χ^2 degli eventi simulati dividendola nei passi principali.

- applicazione della parte causale della maschera $M^C(z)$ (filtro sbiancante) ai dati in uscita $o(n)$

- stima della varianza dei dati $i(n)$ cosi' ottenuti quando non e' presente il segnale: $\sigma_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N i^2(n)$, dove il numero N di dati utilizzati deve essere sufficientemente grande da rendere l'errore sulla stima di σ_i trascurabile. Per i nostri scopi si e' dimostrato sufficiente $N = 10^4$.

- applicazione ai dati $i(n)$ della parte acausale della maschera $M^A(z)$

- nei dati filtrati $f(n)$ si cerca la posizione del massimo $A = \max\{|f(n)|\}$ che rappresenta la migliore stima dell'ampiezza del segnale e si determina la varianza $\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N f^2(n)$ quando non e' presente il segnale. Poiche' si tratta di dati correlati occorre prendere un dato ogni tempo di Wiener

ottimo definito come $\tau_w \equiv 1 / \max\{\text{Re}\{q_k\}\}$. La stima di σ_A richiede dunque, per una banda ottima di 50 Hz circa $N = 5 \cdot 10^5$ campioni.

- determinazione del rapporto segnale/rumore $SNR = \frac{A}{\sigma_A}$

- calcolo di $\chi^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{i^2(n)}{\sigma_i^2} - SNR^2$

A questo punto e' utile ricordare che lo spettro reale di un'antenna presenta rumore a bassa frequenza di origine sismica, armoniche di rete, modi normali trasversali e longitudinali della barra a varie frequenze ecc.. Il χ^2 dunque puo' contenere solamente l'informazione spettrale dei dati sbiancati in un intervallo di diciamo 200 Hz attorno ad 1 KHz. Infatti nei dati di un'antenna reale lo spettro di rumore ha le proprieta' richieste dal nostro modello per l'implementazione del filtro di Wiener (vedi eq. (7)) in tale intervallo di frequenze. L'eccesso di rumore non da alcun problema per i dati filtrati dato che la banda passante del filtro di Wiener e' nel caso piu' favorevole di 50 Hz attorno ad 1 KHz (vedi Fig. 5). I problemi nascono per i dati sbiancati dato che il filtro $\Gamma(i\omega)$ non e' un filtro limitato in banda (vedi Fig. 6). Occorre quindi trovare un modo per limitare la banda dei dati innovazione $i(n)$ e che contemporaneamente non degradi di molto l'efficienza del test del χ^2 . Abbiamo a disposizione due possibili soluzioni:

a) Eseguire una "Fast Fourier Transform" dei dati $i(n)$ per ogni evento filtrato che superi una certa soglia T (ad esempio $T = 4\sigma_A$) e nella stima di χ^2 considerare solamente quelle componenti in frequenza $I(n)$ dove il rumore ha le proprieta' del modello. Possiamo costruire quindi la grandezza χ^2 limitato in banda

$$\chi_L^2 = \frac{1}{N_L - 1} \sum_n |I(n)|^2 - SNR^2 \quad (20)$$

dove $I(n) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} i(k) e^{-2\pi i n k / N}$ e' la Trasformata di Fourier Discreta della sequenza $i(n)$ mentre la somma e' eseguita sugli N_L coefficienti $I(n)$ che appartengono alla banda di frequenze di interesse. Ovviamente piu' piccola e' questa banda meno sensibile sara' il test.

b) Sfruttare gli algoritmi di decimazione del segnale filtrato per selezionare l'intervallo di frequenze dove non sono presenti distorsioni dello spettro di rumore. Utilizzando questo secondo approccio e' possibile fornire un valore di χ^2 per ogni dato filtrato senza ricorrere ad alcuna soglia per selezionare gli eventi. Questo metodo, che e' quello effettivamente implementato nell'analisi in linea dei dati dell'antenna

AURIGA, e' descritto in dettaglio in rif. [6].

I dati ottenuti con il metodo della Fast Fourier Transform per calcolare χ^2 sulla banda [900 ÷ 1100] Hz sono riportati nel grafico di Fig. 8 dove possiamo notare che l'andamento di χ^2 in funzione di SNR e' rappresentabile da una legge del tipo

$$\langle \chi^2 \rangle = 1 + \lambda_\alpha SNR^2 \quad (21)$$

dove λ_α sono costanti distinte per ogni tipo di spurio⁷.

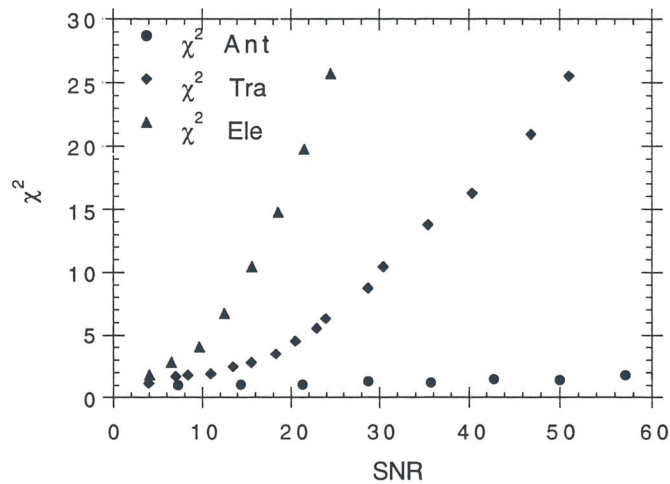


Fig. 8

χ^2 in funzione di SNR per i segnali spuri di tipo Antenna, Trasduttore e Risonatore.

Mediante un "best fit" dei risultati ottenuti con simulazioni abbiamo stimato $\lambda_{ant} = 0$ (ovviamente), $\lambda_{tra} = 9 \times 10^{-3}$ e $\lambda_{ris} = 4.3 \times 10^{-2}$ per cui si puo' concludere che per $SNR \geq 8$ il test fornisce una efficace reiezione sia di eventi spuri dal trasduttore che di quelli dal risonatore.

6. Conclusioni

Abbiamo mostrato come sia possibile, nell'ambito del sistema di analisi dati dell'antenna gravitazionale AURIGA, eseguire a posteriori un test di consistenza sugli eventi gravitazionali che permette la reiezione di eventi spuri ad alto SNR. La possibilita' di implementare praticamente questo test e' interamente legata al sistema di acquisizione veloce (5 KHz), appositamente sviluppato per l'antenna AURIGA. Questo test sostituisce

diversi metodi empirici finora utilizzati¹ per la reiezione degli eventi spuri, come ad esempio il test che controlla che su entrambi i modi dell'antenna sia stata depositata la stessa quantita' di energia, che non sono piu' applicabili quando la banda passante delle antenne ultracriogeniche raggiungera' qualche decina di Hz.

6. Bibliografia

- 1) Vedi ad es.: P. Astone et. Al. *Phys. Rev.* **D47** 2 (1993); W.W. Johnson et al in *Proc. of the First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments* E. Coccia, G. Pizzella e F. Ronga Eds (World Scientific - Singapore -1995), p. 128.
- 2) M. Cerdonio et Al. in *Proc. of the First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments* E. Coccia, G. Pizzella e F. Ronga Eds (World Scientific - Singapore -1995), p. 176; M. Cerdonio et. al. *Nucl. Phys.* **B35** 75 (1994).
- 3) G. A. Prodi et. Al. in *Proc. of the International Conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors* F. Fiducario Ed. (World Scientific - to be published).
- 4) A. Papoulis *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, (McGraw-Hill Singapore 1984)
- 5) S. Vitale et Al. in *Proc. of the First Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Wave Experiments* E. Coccia, G. Pizzella e F. Ronga Eds (World Scientific - Singapore -1995), p. 220
- 6) A. Ortolan e G. Vedovato. LNL-I.N.F.N. (REP)108/ 96
- 7) Si noti che le costanti λ_α possono essere trovate sperimentalmente provocando eventi spuri nel sistema ed applicando la procedura descritta per il calcolo di χ^2 ; i valori trovati con le simulazioni hanno solamente lo scopo di inquadrare il problema.

the *Journal of Applied Behavior Analysis* (1974), and the *Journal of Experimental Psychology* (1975).

There are a number of reasons why the *Journal of Applied Behavior Analysis* is the most widely cited journal in the field of behavior analysis. First, it is the only journal in the field that is published by a professional organization, the Association for Behavior Analysis (ABA).

Second, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of publication, the American Psychological Association (APA).

Third, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of editing, the American Psychological Association (APA).

Fourth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of distribution, the American Psychological Association (APA).

Fifth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of circulation, the American Psychological Association (APA).

Sixth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of advertising, the American Psychological Association (APA).

Seventh, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of production, the American Psychological Association (APA).

Eighth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of design, the American Psychological Association (APA).

Ninth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of printing, the American Psychological Association (APA).

Tenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of binding, the American Psychological Association (APA).

Eleventh, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of cover, the American Psychological Association (APA).

Twelfth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of spine, the American Psychological Association (APA).

Thirteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of pages, the American Psychological Association (APA).

Fourteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of illustrations, the American Psychological Association (APA).

Fifteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of tables, the American Psychological Association (APA).

Sixteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of figures, the American Psychological Association (APA).

Seventeenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of references, the American Psychological Association (APA).

Eighteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of abstracts, the American Psychological Association (APA).

Nineteenth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of indexes, the American Psychological Association (APA).

Twentieth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of supplements, the American Psychological Association (APA).

Twenty-first, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of errata, the American Psychological Association (APA).

Twenty-second, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of notices, the American Psychological Association (APA).

Twenty-third, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of announcements, the American Psychological Association (APA).

Twenty-fourth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of correspondence, the American Psychological Association (APA).

Twenty-fifth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of letters, the American Psychological Association (APA).

Twenty-sixth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of comments, the American Psychological Association (APA).

Twenty-seventh, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of replies, the American Psychological Association (APA).

Twenty-eighth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of discussions, the American Psychological Association (APA).

Twenty-ninth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of debates, the American Psychological Association (APA).

Thirtieth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of reviews, the American Psychological Association (APA).

Thirty-first, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of reports, the American Psychological Association (APA).

Thirty-second, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of articles, the American Psychological Association (APA).

Thirty-third, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of books, the American Psychological Association (APA).

Thirty-fourth, it is the only journal in the field that is published by a publisher that is known for its high quality of chapters, the American Psychological Association (APA).