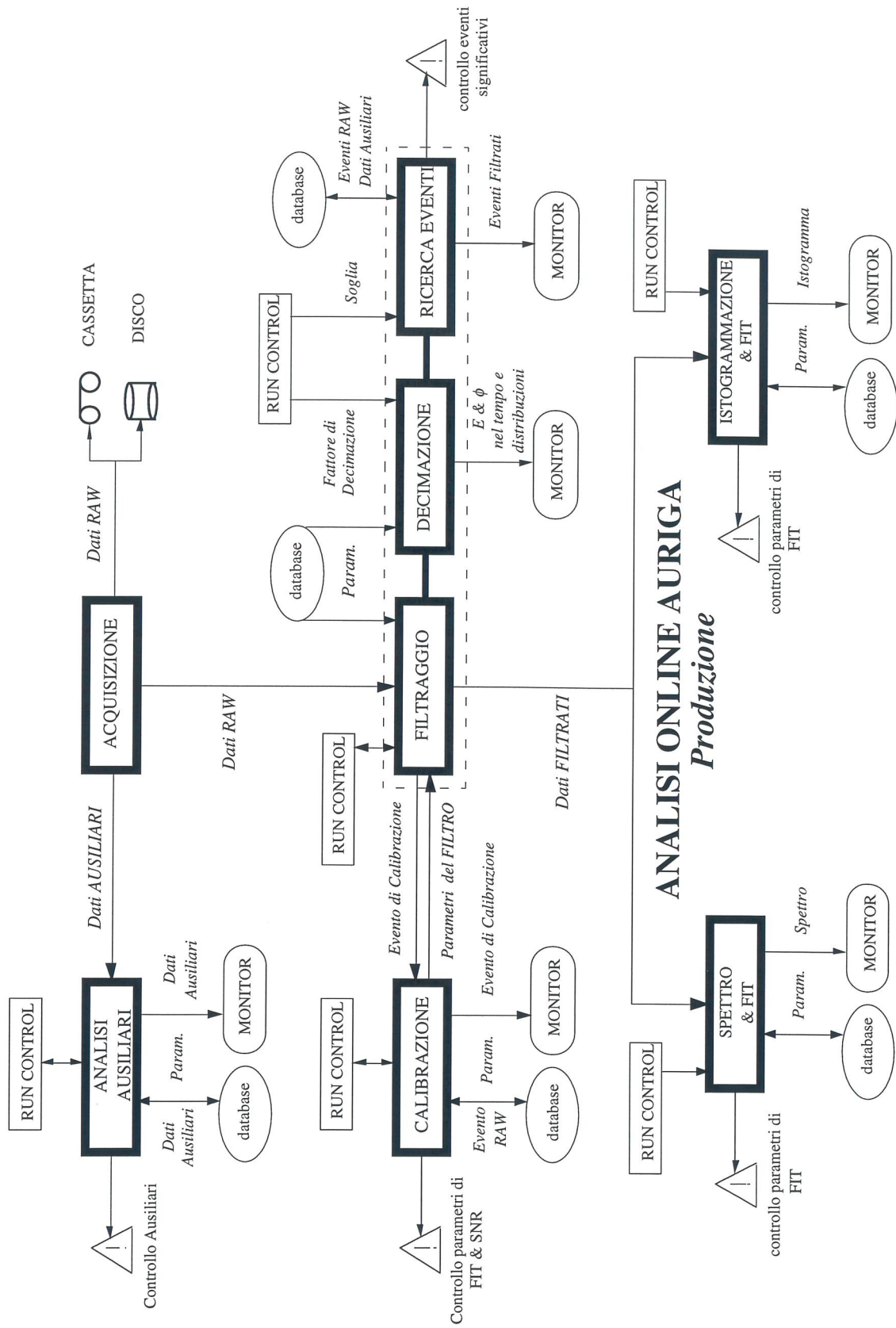


ANALISI ON-LINE AURIGA

G. Vedovato, A. Ortolan

I.N.F.N. Laboratori Nazionali di Legnaro

A cura del servizio
Documentazione dei
L.N.L.



PREMESSA

Definiamo alcune grandezze necessarie per costruire gli algoritmi che riguardano l'analisi del segnale dell'antenna AURIGA, in costruzione presso i *Laboratori Nazionali di Legnaro* dell'INFN. Seguiremo la convenzione di indicare con una lettera minuscola, ad esempio con $x(t)$, un qualunque segnale nel dominio del tempo e con la stessa lettera maiuscola la corrispondente trasformata di Fourier nel dominio della frequenza (ad es

$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$). Lo stesso segnale a tempo discreto verra' scritto con

un indice n $x_n \equiv x(nT)$, dove T rappresenta il tempo di campionamento del segnale; la corrispondente Trasformata di Fourier Discreta (DFT) sara'

$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$, dove N indica il numero di campioni che compongono la

sequenza di partenza x_k . Il legame tra grandezze continue e grandezze discrete e' stabilito dal teorema del campionamento che, sotto l'ipotesi che $X(\omega) = 0$ per $|\omega| \geq \pi / T$, implica

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(kT - t)\right]}{\frac{\pi}{T}(kT - t)} \quad (1)$$

Con riferimento alla Fig. 1, introduciamo le seguenti grandezze che determinano completamente le caratteristiche del segnale all'uscita del rivelatore AURIGA:

- 1) il processo stocastico $\eta(\omega)$ che rappresenta il rumore totale del rivelatore. Si tratta di un processo a media nulla e correlazione $\langle \eta(\omega) \eta(\omega') \rangle = S(\omega) \delta(\omega - \omega')$, dove $\langle \dots \rangle$ rappresenta la media di insieme statistico e $S(\omega)$ e' lo spettro di potenza del rumore. Si distinguono due contributi principali a $S(\omega)$: il rumore a banda larga, dovuto all'amplificatore (GaAsFET o dc SQUID) del segnale e il rumore a banda stretta, dovuto principalmente all'agitazione termica della barra di alluminio che costituisce l'antenna gravitazionale vera e propria, del trasduttore risonante capacitivo e dell'eventuale circuito risonante di adattamento di impedenza tra amplificatore dc SQUID e trasduttore;
- 2) la funzione di trasferimento, detta anche risposta all'impulso dell'antenna, $H(\omega)$. Il numero P di poli semplici di $H(\omega)$ dipende dalla configurazione con cui viene trasdotta ed amplificata l'ampiezza di vibrazione della barra di alluminio: 2 poli utilizzando un amplificatore GaAsFET, 3 poli utilizzando un adattatore di impedenza risonante ed un amplificatore dc SQUID;
- 3) il segnale $F(\omega)$ espresso come forza che agisce sulla barra di alluminio

($F(\omega) = \omega^2 G(\omega)$ con $G(\omega)$ trasformata di Fourier dell'impulso gravitazionale);

- 4) il tempo di arrivo del segnale t_a (per definizione il tempo in cui l'ampiezza del segnale filtrato e' massima);
- 5) il processo stocastico $X(\omega)$ che rappresenta la somma del segnale e del rumore all'uscita dell'antenna.

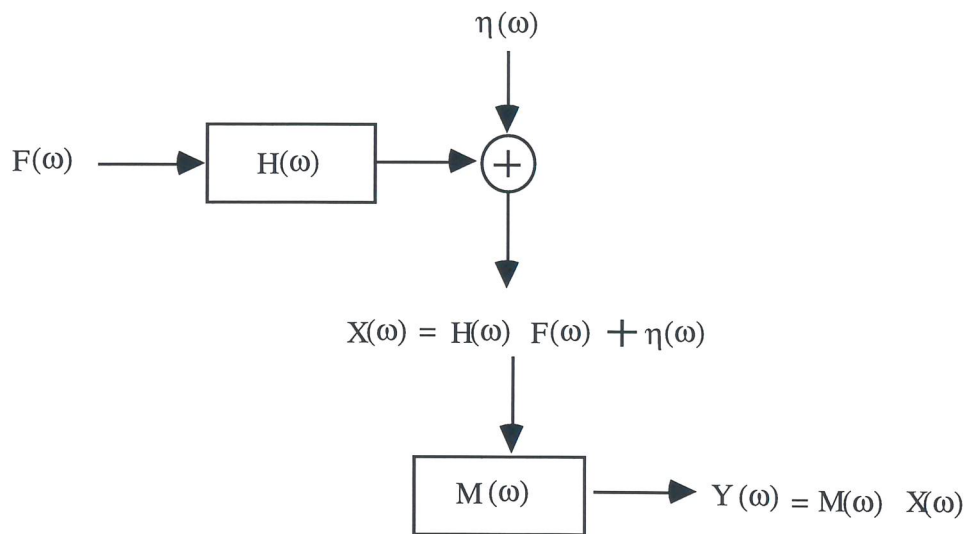


Fig. 1

Schema a blocchi dell'antenna gravitazionale AURIGA e del filtraggio dei dati.

Per aumentare il rapporto segnale rumore (S/N) secondo la teoria del filtro ottimo di Wiener, all'output dell'antenna $X(\omega)$ dobbiamo applicare la maschera $M(\omega) \equiv \frac{H^*(\omega)}{S(\omega)}$ adattata ad un segnale di tipo $\delta(t)$ in ingresso, ottenendo cosi' i dati filtrati $Y(\omega) \equiv M(\omega) \cdot X(\omega)$. Poiche' il segnale gravitazionale $f(t)$ non e' noto dobbiamo fare alcune ipotesi sul tipo di segnale atteso: se $f(t)$ e' un segnale di durata finita T_s possiamo applicare un metodo di estrazione del segnale dal rumore, noto come espansione di Karhunen-Loeve (K-L). Si tratta di rappresentare $f(t)$ come una serie di funzioni ortonormali nell'intervallo $\left[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}\right]$:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(t), \quad (2)$$

dove le funzioni $\varphi_m(t)$ vengono scelte in modo che le ampiezze c_m risultino statisticamente indipendenti. Si dimostra che le $\varphi_m(t)$ sono le autofunzioni della funzione di autocorrelazione del rumore rimasto dopo il filtraggio $R(t-t') \equiv \langle Y(t)Y(t') \rangle$, soluzioni dell'equazione integrale

$$\int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} R(t-t') \varphi_m(t') dt' = \lambda_m \varphi_m(t), \quad (3)$$

con le proprietà

$$\int_{-\frac{T_s}{2}}^{+\frac{T_s}{2}} \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{mn}. \quad (4)$$

Indicata con $\Phi_m(\omega)$ la trasformata di Fourier della m-esima autofunzione, la stima delle componenti di K-L del segnale è data da

$$c_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2\pi} \int \left(\Phi_m(\omega) e^{-i\omega(t-t_a)} \right) \left(\frac{H^*(\omega)}{S(\omega)} X(\omega) \right) d\omega. \quad (5)$$

La varianza della stima di ciascuna componente $c_m(t_a)$ risulta inversamente proporzionale al corrispondente autovalore λ_m

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{\lambda_m}, \quad (6)$$

dove

$$\lambda_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{S(\omega)} |\Phi_m(\omega)|^2 d\omega. \quad (7)$$

Il rapporto segnale rumore per ogni componente SNR_m , al tempo $t=t_a$, è dato pertanto da

$$SNR_m^2 = \frac{c_m^2}{\sigma_m^2} = \lambda_m c_m^2. \quad (8)$$

In assenza di segnale le componenti K-L non sono tra loro correlate ($\langle c_n c_m \rangle = \delta_{nm}$) e questa proprietà può essere usata come un controllo sul calcolo delle autofunzioni. Avendo determinato le autofunzioni del sistema "antenna+filtro" siamo in grado di verificare se le ipotesi fatte su $H(\omega)$ e

$S(\omega)$ (poli e zeri semplici nel piano complesso $(\omega, i\tau)$) sono verificate sperimentalmente: e' sufficiente applicare al calibratore (vedi paragrafo Calibrazione) un segnale in voltaggio che abbia la stessa forma delle prime autofunzioni. Due sono le verifiche che abbiamo a disposizione: i) la forma del segnale dovuto all'eccitazione con una autofunzione deve rimanere inalterata dopo il filtraggio; ii) il rapporto S/N di ciascuna autofunzione, inviata al calibratore con ampiezza costante, deve scalare secondo la relazione (8). Durante i tests eseguiti su di una antenna a temperatura ambiente abbiamo visto che il sistema completo funziona secondo il modello almeno per le prime 10 autofunzioni.

L'analisi del segnale dell'antenna, che e' finalizzata alla ricerca di impulsi gravitazionali immersi nel rumore del rivelatore, puo' essere scomposta in fasi che corrispondono a momenti distinti dell'analisi dei dati:

- 1) filtraggio con $M(\omega)$ (Analisi ON-LINE):

$$Y(\omega) = \left(\frac{H^*(\omega)}{S(\omega)} X(\omega) \right)$$

- 2) stima dei coefficienti di K-L (Analisi ON-LINE & Analisi OFF-LINE)

$$c_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \frac{1}{2\pi} \int \left(\Phi_m(\omega) e^{-i\omega(t-t_a)} \right) Y(\omega) d\omega$$

si noti che solo i primi coefficienti sono rilevanti per la ricerca di burst di onde gravitazionali.

- 3) stima del tempo d'arrivo t_a (Analisi OFF-LINE): il tempo di arrivo di un impulso corrisponde al tempo $t = t_a$ per cui le componenti c_m , in assenza di rumore, sono massime; Nel caso in cui il segnale domini sul rumore ($S/N \geq 8$), si puo' dimostrare che uno stimatore efficiente del tempo di arrivo e' l'istante in cui e' massima l'energia dei dati filtrati $y(t)$,

$$\text{definita come } E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt.$$

Per implementare il filtraggio on-line con la maschera $M(\omega)$ e gestire i dati provenienti dal canale del segnale, dai canali ausiliari e complementari l'analisi e' stata divisa in processi paralleli. Il calcolo parallelo si rende necessario, oltre che per l'ovvio motivo di ottimizzare l'impiego delle risorse delle workstations, perche' durante l'analisi on-line si utilizzano routines di minimizzazione la cui durata non e' predicibile. Tali routines, essendo eseguite in diversi processi che procedono in parallelo, non possono

bloccare il flusso dei dati provenienti dall'acquisizione. I processi in cui sono state suddivise le diverse operazioni dell'analisi on-line sono:

- **Aquisizione:** ricezione dei buffers di dati provenienti dal processo di lettura dei convertitori A/D;
- **Analisi Dati Antenna, Analisi Dati Ausiliari, Analisi Dati Complementari:** analisi on-line dei diversi tipi di dati acquisiti;
- **Spettri&FIT, Istogrammi&FIT:** produzione degli spettri dei dati filtrati e dei relativi istogrammi per valutare la temperatura efficace dell'antenna;
- **Calibrazione Antenna:** calcolo dei parametri necessari per il filtraggio ottimo.

A questi vanno aggiunti i processi:

- **Run Control:** controllo delle diverse funzioni dell'analisi;
- **Monitor:** controllo del flusso di dati visualizzando sia il contenuto dei canali di acquisizione che i risultati di tutte le operazioni dell'analisi (FFT, filtraggio, best-fits, etc.);
- **Check:** raccolta dei risultati di ogni controllo fatto sui diversi processi;
- **DataBase:** scrittura su di un database (ORACLE) di ogni grandezza utile per la ricerca di eventi gravitazionali.

Nei paragrafi successivi vedremo piu' in dettaglio il funzionamento degli 11 processi e le loro interconnessioni. Indicheremo con MONITOR:, DATABASE: e CHECK: le grandezze che rispettivamente vengono inviate ai processi di MONITOR, DATABASE e CHECK. Con INPUT: segneremo il processo (se diverso da quello di acquisizione) o il file da dove provengono i parametri o i dati necessari al processo per funzionare correttamente.

ACQUISIZIONE

Il segnale analogico proveniente dall'antenna e' campionato alla frequenza di 5 KHz mediante un convertitore A/D con una risoluzione nominale pari a 21 bit (corrispondenti a 18 bit effettivi). I segnali ausiliari (accelerometri, sismometri, sonde elettromagnetiche, rivelatori di raggi cosmici, etc.) vengono acquisiti alla frequenza di campionamento di 200 Hz mediante convertitori A/D a 16 bit di risoluzione. I segnali complementari (termometri, flussometri, manometri, etc.) sono acquisiti attraverso l'interfaccia GPIB alla velocita' di un dato ogni 10 secondi. I dati campionati provenienti da tutti i canali di acquisizione vengono scritti:

- 1) su cassette EXABYTE con capacita' di 5 GBytes (che contengono circa 48 ore di dati, prevedendo una produzione di 30 KByte/sec)
- 2) su disco (buffer temporaneo con le ultime 10 ore di dati)

La scrittura su disco permette all'acquisizione di mantenere i dati acquisiti per un certo periodo di tempo nel caso in cui la registrazione su cassette non funzionasse. L'eventuale recupero e filtraggio di questi dati potrebbe essere eseguito dall'analisi off-line.

I dati del canale antenna, dei canali ausiliari e dei canali complementari vengono rispettivamente inviati ai processi ANALISI DATI ANTENNA, ANALISI DATI AUSILIARI e ANALISI DATI COMPLEMENTARI.

ANALISI DATI ANTENNA

In questo processo vengono svolte le operazioni principali dell'analisi on-line del segnale di AURIGA: il *filtraggio ottimo*, la *decimazione* dei dati filtrati e la *ricerca eventi* che superano una soglia prefissata.

FILTRAGGIO

L'algoritmo adottato per l'operazione di FILTRAGGIO dei dati RAW viene implementato mediante un processo ARMA (AutoRegressive Moving Average). L'operazione FILTRAGGIO, che nel dominio della frequenza corrisponde a moltiplicare la trasformata di Fourier del segnale per la maschera $M(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{S(\omega)}$, puo' essere scritta per un sistema a tempo discreto nel modo seguente (per la dimostrazione vedi Appendice B)

$$y(l) = \sum_{n=1}^P (y_n^-(l) + y_n^+(l)) , \quad (10)$$

dove P e' il numero di poli della funzione di trasferimento dell'antenna e

$$y_n^+(l) = -\sum_{i=1}^2 C_i^n \cdot y_n^+(l-i) + \sum_{i=0}^1 A_i^n \cdot x(l-i), \quad (11)$$

$$y_n^-(l) = -\sum_{i=1}^2 C_i^n \cdot y_n^-(l+i) + \sum_{i=0}^1 B_i^n \cdot x(l+i)$$

rappresentano rispettivamente la parte causale ed acausale del filtro. In queste equazioni ricorsive $x(n)$ sono i dati RAW di input e $y(n)$ i dati filtrati. I coefficienti A_i^n, B_i^n e C_i^n vengono calcolati dal processo di calibrazione e sono tali da massimizzare il rapporto S/N.

L'equazione ricorsiva che computa $y^{+,-}(n)$ contiene 2 P condizioni iniziali che vengono poste arbitrariamente uguali a zero per ogni buffer di dati filtrati (Vedi Fig. 2). Si puo' verificare (vedi Appendice C) che le condizioni iniziali diventano ininfluenti quando $lT > 4\tau_{opt}$, dove τ_{opt} è il tempo ottimo e T e' il tempo di campionamento. Questa condizione fissa la lunghezza dei dati scartati per ogni operazione di filtraggio su un buffer di dati (vedi fig. 2). Ad esempio per $\tau_{opt}=0.02$ sec e $T=0.0002$ sec (valori previsti per AURIGA) vengono scartati $\approx 10^3$ dati; utilizzando un buffer di dati RAW di 64×10^3 campioni, i dati scartati rappresentano appena il 2 % dei dati filtrati.

In Appendice D abbiamo riportato il confronto tra diversi metodi di filtraggio

Schema del filtro ARMA

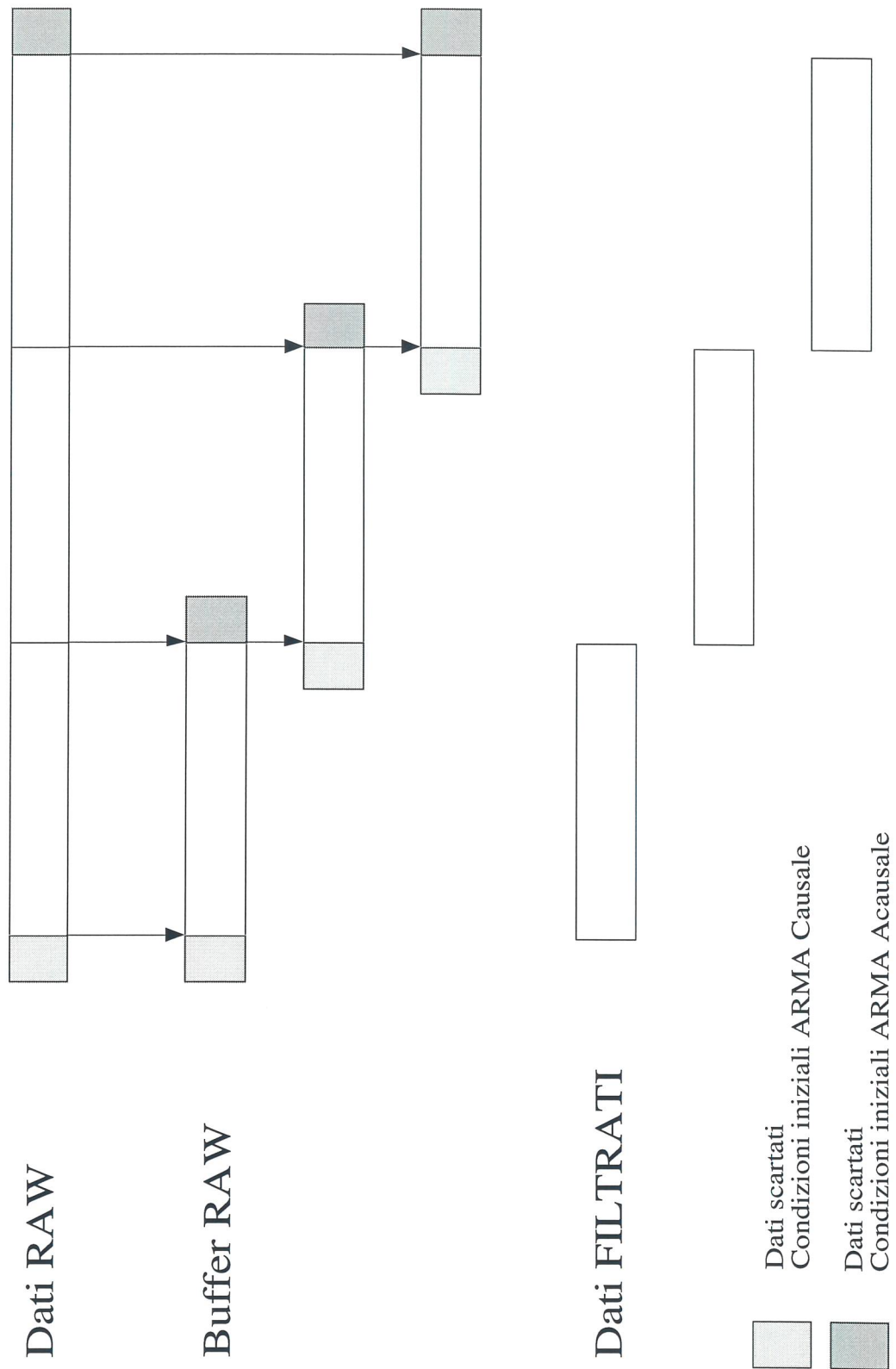


Fig. 2

Costruzione dei buffers di dati filtrati mediante un processo ARMA a partire dai buffers di dati RAW.

da cui risulta che il numero di operazioni richieste per l'algoritmo di filtraggio basato su un processo ARMA e' inferiore a quello richiesto per il metodo convenzionale.

DECIMAZIONE

In questa parte del programma viene calcolata l'energia del segnale dell'antenna ogni $T_s/2$ secondi; la scelta del periodo e' stata fatta in modo che l'energia depositata da qualunque segnale impulsivo sulla barra di alluminio venga sempre registrata nei dati decimati; l'energia viene calcolata su intervalli di tempo che si sovrappongono per meta' della loro durata (vedi Appendice E).

Per mantenere una maggior compatibilita' con il tradizionale metodo di analisi dati basato sulla demodulazione del segnale con i Lock-ins (vedi Appendice F), l'energia e' stata calcolata nel modo seguente: mediante le prime autofunzioni normalizzate $\varphi^{(1,2)}$ di K-L relative ai dati filtrati si costruiscono i due processi stocastici

$$x^{(1,2)}(k) = \sum_{l=1}^N y\left(l + \frac{Nk}{2}\right) \varphi^{(1,2)}(l) , \quad (12)$$

dove $N = T_s / T$ rappresenta la durata del segnale espressa in numero di campioni. I due processi risultano essere gaussiani, a media nulla e varianza $\sigma_{x^{(1,2)}}^2 = 1 / \lambda_{(1,2)}$. E' evidente che i dati $x^{(1,2)}(k)$ sono stati decimati di un fattore $N/2$ rispetto ai dati filtrati. Utilizzando questi processi, che corrispondono alle componenti "in fase" ed "in quadratura" dell'uscita di un lock-in, possiamo calcolare due grandezze che, sotto opportune ipotesi (vedi Appendice E), coincidono con l'energia e la fase dell'output del filtro:

$$\begin{aligned} E &= [x^{(1)}]^2 + [x^{(2)}]^2 \\ \vartheta &= \text{ArcTan}[x^{(1)}, x^{(2)}] \end{aligned} \quad (13)$$

L'energia E viene istogrammata periodicamente per avere una stima della sensibilita' dell'antenna: infatti, in assenza di segnali gravitazionali, $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ sono processi stocastici gaussiani scorrelati con tipicamente la stessa varianza $\sigma_{x^{(1)}}^2 = \sigma_{x^{(2)}}^2 \equiv \sigma_x^2$. Si dimostra che in questo caso la distribuzione statistica di E

deve essere Boltzmaniana $P(E) = \frac{1}{k_B T_{eff}} \exp\left(-\frac{E}{k_B T_{eff}}\right) dE$, dove $T_{eff} = \frac{2\sigma_x^2}{k_B}$ e' la

temperatura efficace dell'antenna. D'altro canto la distribuzione di ϑ deve essere uniforme nell'intervallo $(-\pi, \pi)$. Le determinazioni dell'energia $E(k)$ del segnale non sono statisticamente indipendenti: si puo' dimostrare che i processi $x^{(1,2)}$ (in assenza di segnale!) sono autocorrelati per un tempo dell'ordine di τ_{opt} . Percio', dal punto di vista delle sole proprieta' statistiche

del rumore, e' sufficiente conservare l'energia dei dati filtrati calcolata ogni τ_{opt} . L'energia dell'antenna calcolata ogni tempo ottimo, nota comunemente come *innovazione di energia.*, sara' calcolata continuamente e registrata su di un file; i dati accumulati saranno utilizzati per un confronto, attraverso la rete INFNET, con i dati analoghi provenienti da altre antenne gravitazionali (in particolare dall'antenna NAUTILUS dei Laboratori Nazionali di Frascati). In questo modo saremo in grado di stimare sia il rumore di fondo di due rivelatori, confrontando le due serie temporali delle rispettive energie a tempi diversi, che di eseguire una prima ricerca di coincidenze confrontando dati a ritardo nullo (τ_{opt} (attualmente ≈ 1 sec) e' molto piu' grande del ritardo dovuto alla velocita' di propagazione dell'impulso gravitazionale (≈ 1 msec) per cui le coincidenze, entro il tempo ottimo, possono essere considerate istantanee).

INPUT: Gli inputs del processo sono il fattore di decimazione $N/2$, la durata del segnale T_s e le prime due autofunzioni K-L (provenienti dal processo SPETTRO&FIT).

MONITOR: Vengono visualizzati E e ϑ nel tempo e la loro distribuzione statistica (gli istogrammi vengono rinnovati periodicamente).

MONITOR: Viene visualizzata la distribuzione statistica di E e ϑ relativa a tutti i dati accumulati dall'inizio dell'acquisizione (periodicamente viene salvata su un file temporaneo per evitare di perdere l'informazione a seguito di un crash dell'acquisizione).

DATABASE: Periodicamente sono registrati sul DataBase gli istogrammi di E e ϑ e i loro parametri di fit (in particolare la temperatura efficace dell'antenna).

RICERCA EVENTI

Per la ricerca di eventi dovuti a impulsi gravitazionali e' conveniente fissare una soglia S espressa in multipli del valore rms delle fluttuazioni in energia del segnale filtrato (questo valore e' ricavato dal processo di ISTOGRAMMI&FIT). Una soluzione semplice per il calcolo dell'energia del segnale e' quella di sommare i dati filtrati in modulo quadro per la durata

del segnale T_s ,
$$E(k) = \sum_{n=1}^N y^2 \left(n + \frac{Nk}{2} \right),$$
 dove $N = T_s / T$. Quando questa

grandezza supera la soglia S inizia per l'analisi on-line un *evento*. Esso e' costituito dai dati filtrati che iniziano $N/2$ campioni prima del superamento della soglia ($E(k) \geq S$) e finiscono $N/2$ campioni dopo che la soglia e' stata riattraversata ($E(k) < S$). Gli eventi sono di durata variabile, dato che per l'algoritmo da noi scelto un evento continua finche' l'energia del segnale rimane sopra-soglia. Il buffer di dati che costituisce un evento viene scomposto nelle sue componenti di K-L che saranno poi registrate su

DataBase. Visto che l'informazioni rilevanti del segnale si trovano solo sulle prime componenti di K-L si puo' prevedere la registrazione solo di queste. Ad esempio secondo alcune simulazioni sono sufficienti le prime 6 componenti per ricostruire un segnale di durata $T_s \approx 20msec$ pari al tempo ottimo del rivelatore. I dati dei canali ausiliari e complementari verranno associati all'evento nel DataBase cercando di definire un protocollo per le anticoincidenze di eventi spuri. Anche i parametri utilizzati per il filtraggio on-line dell'evento vengono registrati nel DataBase ed eventualmente possono essere ricavati, per controllo, dall'evento di calibrazione piu' vicino.

MONITOR: Vengono visualizzati nel tempo gli eventi piu' significativi.

CHECK: Controllo sulle ampiezze degli eventi piu' significativi.

E' utile osservare che l'analisi OFF-LINE di un evento gravitazionale puo' essere scomposta nel modo seguente:

- per i dati RAW scritti su cassetta

- 1) Eventuale filtraggio dell'evento ricalcolando i parametri della maschera M ;
- 2) Determinazione dell'ampiezza e del tempo di arrivo dell'evento sui dati filtrati con M;
- 3) Determinazione delle componenti di K-L;

- per i dati scritti su DataBase

- 4) Eventuale sottrazione del picco di calibrazione in prossimita' dell'evento;
- 5) Anticoincidenze eventi spuri (controllo dei canali ausiliari);
- 6) Coincidenze con i dati di altre antenne. (vedi Appendice A per la determinazione del tempo di arrivo di un segnale impulsivo (Timing)).

ANALISI DATI AUSILIARI

I dati dei canali ausiliari, acquisiti con il tempo di campionamento $T_{aus} = 5 \times 10^{-2}$ sec, vengono analizzati e conservati in un buffer che contiene la storia recente di tutti i canali per un tempo pari a qualche ora. E' previsto per alcuni canali la stima dello spettro di potenza. Il processo ANALISI DATI AUSILIARI calcola per ogni segnale ausiliario $a(t)$ la grandezza

$$a_{rms}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a^2\left(n + \frac{Nk}{2}\right)}, \quad (14)$$

dove $N = T_{aus} / T_s$ e' stato scelto in modo da ottenere una corrispondenza temporale con i dati decimati $E(k)$ relativi all'energia del segnale. Tali dati ed i corrispondenti complementari (vedi ANALISI DATI COMPLEMENTARI) vengono accumulati su buffers che, inviati continuamente al processo DATABASE, vengono associati da questo processo agli eventi sopra soglia. Off-line si decidera' se esercitare il veto e in quale modo. Saranno calcolati anche media e varianza delle uscite $a(t)$ in modo da graficare l'andamento dei canali ausiliari nel tempo.

E' previsto l'impiego della seguente strumentazione ausiliaria:

- i) 4 accelerometri situati sui cavi che sostengono il contenitore dell'elio a cui in seguito si pensa di aggiungere altri 3 accelerometri lungo tre direzioni perpendicolari sopra il criostato dove e' alloggiata l'antenna. Il range di misura previsto e' quello attorno alle frequenze dei modi normali del rivelatore: 500-1500 Hz; il segnale e' demodolato analogicamente in modo da potere essere campionato a 200 Hz. La grandezza fisica misurata e' l'energia di vibrazione di ciascun cavo che, potendo essere trasmessa al modo fondamentale dell'antenna, puo' simulare un evento gravitazionale. In particolare si pensa all'energia rilasciata dal movimento improvviso di dislocazioni presenti in un solido cristallino quando questo e' posto sotto tensione.
- ii) 2 sismometri situati rispettivamente sulla piattaforma di cemento dove e' appoggiato il criostato e sul criostato stesso; viene acquisita solo l'ampiezza del vettore spostamento per ogni sismometro. Si pensa che il segnale sismico a bassa frequenza possa essere convertito dalle non linearita' del sistema in un segnale a frequenza piu' alta in modo da eccitare il modo fondamentale dell'antenna.
- iii) 2 sonde elettromagnetiche situate in prossimita' del criostato per la ricerca di disturbi elettromagnetici che possono influenzare il funzionamento dell'amplificatore SQUID. Inoltre, dopo il filtraggio, un picco di segnale elettromagnetico veloce ha caratteristiche simili ad un vero evento gravitazionale. Il range di frequenze in cui questi apparati

funzionano e' 0.1-1 GHz per la sonda elettrica e 1-1000 Hz per la sonda magnetica. Si pensa di utilizzare un circuito *maxhold* per avere il livello massimo del disturbo e un circuito integratore che da la sua energia quadratica media con le rispettive uscite sempre campionate a 200 Hz.

- iv) 2 lock-ins analogici che acquisiscono rispettivamente l'ampiezza di due sinusoidi di calibrazione, una applicata al calibratore e l'altra alla bobina di ingresso dello SQUID. Lo scopo e' la determinazione di tutti i guadagni nella catena di elettrotrasduzione. La frequenza delle due sinusoidi e' prossima a quella dei modi normali.

MONITOR: Vengono visualizzati i canali ausiliari mantenendo memoria dell'ultime ore di dati . Di alcuni canali e' prevista la visualizzazione dello spettro di potenza.

CHECK: Viene fissato un intervallo di variazione dei diversi canali, prevedendo un messaggio di allarme quando questo intervallo viene superato.

ANALISI DATI COMPLEMENTARI

I Segnali Complementari sono tutte le letture lente della strumentazione dell'antenna: sono previsti i seguenti canali, tutti acquisiti attraverso la porta GPIB della stazione di acquisizione, al rate di 1 un dato ogni 10 secondi:

- 1) Temperature dei diversi schermi del criostato e temperatura della barra di alluminio.
- 2) Flussi di ^3He - ^4He per il funzionamento del refrigeratore a diluizione.
- 3) Pressioni nelle diverse zone del criostato.

Non e' prevista alcuna analisi numerica per questi segnali. Per l'associazione di questi dati ad un evento e la loro scrittura su DataBase vale quanto detto per i segnali ausiliari.

MONITOR: Viene visualizzato l'andamento delle diverse grandezze durante le ultime 24 ore

CHECK: Viene fissato un intervallo di variazione dei diversi canali, prevedendo un messaggio di allarme quando questo viene superato. E' prevista la stampa automatica del messaggio contenente l'informazione del tipo di inconveniente dell'ora in cui si e' verificato.

CALIBRAZIONE

Nel processo di CALIBRAZIONE si calcolano i parametri della maschera p_k e q_k che rendono massimo il rapporto segnale rumore secondo la teoria di Wiener-Kolmogorov.

Il metodo da noi implementato per stimare p_k e q_k prevede l'invio di impulsi di calibrazione all'antenna ad intervalli di qualche ora. Durante l'analisi on-line il buffer di dati RAW relativi ad un evento di calibrazione viene prelevato e filtrato con la maschera costruita partendo dai parametri della calibrazione precedente. Quindi, al variare dei parametri p_k e q_k del filtro, si determinano: i) il valore massimo del segnale di calibrazione; ii) la deviazione standard del rumore dopo il filtraggio. Il rapporto di queste due quantità è una stima del rapporto S/N. Viene impiegata una routine basata sul metodo dei semplici per massimizzare il rapporto S/N.

I parametri della maschera che dobbiamo stimare si ricavano mediante la seguente fattorizzazione

$$M(\omega) = \frac{\omega^P \prod_{n=1}^P (p_n + \omega)(p_n^* - \omega)}{\prod_{n=1}^P (q_n + \omega)(q_n^* - \omega)(q_n - \omega)(q_n^* + \omega)}, \quad (15)$$

dove p_n sono i poli comuni di $H(\omega)$ e $S(\omega)$ mentre q_n sono gli zeri di $S(\omega)$ (vedi Appendice G). D'altra parte, per il calcolo dei coefficienti A_i^n, B_i^n e C_i^n impiegati dal processo ARMA è necessario uno sviluppo in frazioni parziali della precedente relazione

$$M(\omega) = \sum_{n=1}^P \left(\frac{a_n}{q_n + \omega} + \frac{a_n^*}{q_n^* - \omega} \right) + \sum_{n=1}^P \left(\frac{b_n}{q_n - \omega} + \frac{b_n^*}{q_n^* + \omega} \right) : \quad (16)$$

questo viene fatto numericamente valutando i residui di M in un intorno dei poli

$$\begin{aligned} a_n &= \lim_{\omega \rightarrow -q_n} M(\omega)(\omega + q_n) \\ b_n &= \lim_{\omega \rightarrow q_n} M(\omega)(\omega - q_n) \end{aligned} \quad (17)$$

Si noti che i residui della parte causale della maschera non coincidono in generale con quelli della parte acausale rendendo la maschera $m(t)$ non simmetrica per lo scambio $t \rightarrow -t$ (Vedi Appendice H). A questo punto siamo in grado di ricavare esplicitamente, in funzione di a_n, b_n , e q_n , i coefficienti A_i^n, B_i^n e C_i^n necessari al processo ANALISI DATI ANTENNA per eseguire il filtraggio on line:

$$\begin{cases}
A_0^n = 2T \operatorname{Im}\{a_n\} \\
A_1^n = 2T \exp(\operatorname{Im}\{q_n\}T) [\operatorname{Im}\{a_n\} \cos(\operatorname{Re}\{q_n\}T) - \operatorname{Re}\{a_n\} \sin(\operatorname{Re}\{q_n\}T)] \\
B_0^n = 2T \operatorname{Im}\{b_n\} \\
B_1^n = 2T \exp(\operatorname{Im}\{q_n\}T) [\operatorname{Im}\{b_n\} \cos(\operatorname{Re}\{q_n\}T) + \operatorname{Re}\{b_n\} \sin(\operatorname{Re}\{q_n\}T)] \\
C_0^n = 1 \\
C_1^n = -2 \exp(\operatorname{Im}\{q_n\}T) \cos(\operatorname{Re}\{q_n\}T) \\
C_2^n = \exp(2 \operatorname{Im}\{q_n\}T)
\end{cases} \quad (18)$$

CHECK: Si deve controllare che il valore di SNR sia prossimo al valore atteso (si conosce l'ampiezza ed il tempo di invio del segnale di calibrazione).

MONITOR: Si visualizzano gli eventi di calibrazione filtrati.

Riassumiamo i vantaggi del metodo di calibrazione proposto rispetto alla calibrazione in frequenza adottata finora per altre antenne gravitazionali (che consiste nella stima separata di $H^*(\omega)$ e $S(\omega)$ e nel calcolare in seguito il loro rapporto):

i) sono necessari pochi dati perché si utilizzano dati filtrati la cui correlazione, nel caso di antenne criogeniche, è $\approx 10^4 \div 10^5$ volte più piccola della correlazione dei dati RAW;

ii) la ricerca dei parametri ottimi mediante fits non-lineari è più semplice in quanto il rapporto S/N ha una dipendenza molto più blanda dai parametri rispetto a quella della funzione di trasferimento o dello spettro di potenza del rumore dell'antenna (Vedi Appendice H);

iii) si evita la stima di $S(\omega)$ che richiederebbe almeno 10 FFT; se consideriamo un fattore di qualità meccanico di 10^6 , 10 FFT, con una risoluzione in frequenza pari alla larghezza delle lorentziane, corrispondono a circa 3 ore di dati acquisiti;

iv) il picco di calibrazione può essere sottratto dai dati rendendo ininfluente la durata dell'operazione di calibrazione sul "duty cycle" dell'antenna.

SPETTRO & FIT

Si stima lo spettro di potenza $W(\omega)$ dei dati filtrati, calcolando la media del modulo quadro della loro trasformata di Fourier $|Y(k)|^2$ su N buffer di dati. Una routine che si basa sul metodo dei semplici viene utilizzata per determinare il best-fit di $W(\omega)$ nell'intervallo di frequenze in cui questa funzione e' massima. I parametri da calcolare sono una costante di normalizzazione A (che permette di esprimere direttamente in Joule o in Kelvin l'energia del segnale dopo il filtraggio) e il valore dei poli q_n (3 se il modo elettrico e' accoppiato con i due modi normali meccanici, altrimenti 2). Tali parametri si ricavano mediante un fit non lineare dello spettro dei dati filtrati con la funzione

$$W(\omega) = \frac{A \omega^{2P}}{\prod_{n=1}^P (q_n + \omega)(q_n^* - \omega)(q_n - \omega)(q_n^* + \omega)} . \quad (19)$$

A questo scopo viene costruita la grandezza χ^2 ridotto, definita come

$$\chi^2 = \frac{1}{K - N - 1} \sum_i \frac{[W(i\Delta) - \overline{|Y(i)|^2}]^2}{\sigma_{Y_i}^2} , \quad (20)$$

dove Δ e' la risoluzione in frequenza delle FFT, $\overline{|Y(i)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |Y_j(i)|^2$ e' la stima, secondo il metodo della media dei periodogrammi di Bartlett, dell'esimo coefficiente dello spettro di potenza dei dati filtrati e $\sigma_{Y_i}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (|Y_j(i)|^2 - \overline{|Y(i)|^2})^2 \cong \frac{1}{N} \overline{|Y(i)|^2} \cong \frac{1}{N} W(\omega_i)$ rappresenta la varianza di tali stime. Il minimo valore di χ^2 rispetto ai parametri A e q_n ci fornisce il best fit di $W(\omega)$ mentre le incertezze sulla stima di tali parametri si ricavano valutando le derivate seconde di χ^2 nel minimo. Si noti che $W(\omega)$ rappresenta il rapporto S/N per banda di frequenza unitaria e che pertanto la minima ampiezza di un impulso gravitazionale rivelabile a SNR=1 e' data da

$$h_{\min} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) d\omega \right]^{-1/2} . \quad (21)$$

D'altra parte $W(\omega)$ puo' essere scomposto in frazioni parziali nel seguente modo:

$$W(\omega) = \sum_{n=1}^P \left(\frac{D_n}{q_n + \omega} + \frac{D_n^*}{q_n^* - \omega} \right) + \sum_{n=1}^P \left(\frac{D_n}{q_n - \omega} + \frac{D_n^*}{q_n^* + \omega} \right), \quad (22)$$

dove $D_n = \lim_{\omega \rightarrow q_n} W(\omega)(\omega - q_n)$ non sono altro che i residui della funzione W . Applicando il teorema dei residui alla precedente scomposizione risulta

$$h_{\min} = \left[2 \sum_{n=1}^P \text{Im}\{D_n\} \right]^{-1/2}, \quad (23)$$

ottenendo in questo modo una stima numerica immediata della sensibilita' dell'antenna

MONITOR: Si visualizza la stima dello spettro di potenza, la curva di FIT e l'andamento della grandezza h_{\min} nel tempo.

CHECK: I parametri devono variare lentamente nel tempo e i loro valori possono fluttuare entro un certo intervallo dipendente dalle condizioni sperimentali.

ISTOGRAMMAZIONE & FIT

Vengono istogrammati i dati filtrati rinnovando l'istogrammazione all'incirca ogni $100 \tau_{opt}$. Se il filtraggio viene eseguito con la maschera corretta i dati filtrati y_k corrispondono ad un processo stocastico gaussiano a media nulla e varianza σ_M^2 . In questo caso i dati istogrammati sono distribuiti gaussianamente. Se la maschera non e' corretta, i poli della funzione di trasferimento dell'antenna non vengono cancellati dal filtraggio e percio' i tempi di correlazione dei dati filtrati diventano quelli dei dati RAW; questo rende la distribuzione dei dati filtrati, rinnovata periodicamente ogni $100 \tau_{opt}$, non gaussiana. Pertanto si puo' effettuare un controllo della correttezza del filtro eseguendo un best-fit dell'istogramma relativo alla distribuzione dell'ampiezza dei dati filtrati con una curva gaussiana. Il fit fornisce la stima di media, varianza della gaussiana e il valore di χ^2 ridotto del fit.

MONITOR: Si visualizza l'istogramma con sovrapposta la curva di fit, la media, la varianza dei dati ed il χ^2 ridotto del fit.

CHECK: Il controllo viene fatto verificando i seguenti punti:

- 1) la media dei dati filtrati deve essere compatibile con zero entro le fluttuazioni statistiche
- 2) la varianza dei dati filtrati σ_M^2 deve approssimare l'energia media del rumore dopo il filtraggio $\langle E \rangle = k_B T_{eff} = 2\sigma_x^2$ (Vedi Appendice E).
- 3) il χ^2 ridotto del fit deve essere compatibile con 1.

MONITOR & SERVER MONITOR

Il processo MONITOR raccoglie i dati elaborati dall'analisi che nei paragrafi precedenti abbiamo indicato come "MONITOR:". I dati ricevuti vengono scritti su memoria RAM condivisa con il processo SERVER MONITOR da dove possono essere letti su richiesta di "CLIENTS" che si possono trovare su workstations diverse da quella di acquisizione. Come interfaccia grafica per visualizzare su display i dati sono stati utilizzati i softwares LabView (National Instruments) e Paw++ (CERN).

DATABASE

E' il processo che raccoglie i dati indicati nei paragrafi precedenti con "DATABASE:". I dati vengono scritti su files da dove possono essere letti quando devono essere registrati su DataBase. Per l'organizzazione del DataBase si utilizzerà il software ORACLE prevedendo di utilizzare come chiave principale di ricerca degli eventi il tempo universale (UT).

RUN CONTROL

Riceve le richieste provenienti dal pannello di controllo dell'esperimento e le invia ai processi dell'analisi.

Le principali operazioni previste sono:

START,STOP dei processi di Analisi, Monitor o scrittura DataBase

SETUP dei parametri che si possono cambiare durante un run. Ad es. il Fattore di Decimazione (vedi Processo DECIMAZIONE) o la Soglia per DataBase o per MONITOR (vedi Processo RICERCA EVENTI)

APPENDICE A

Secondo la teoria del filtro ottimo di Wiener applicata ad un rivelatore a banda stretta, la risoluzione del tempo di arrivo t_a di un impulso in funzione del rapporto S/N (SNR) segue approssimativamente la legge

$$\sigma_{t_a} = \frac{1}{\omega_0 \text{SNR}} \quad , \quad (\text{A1})$$

dove σ_{t_a} e' la deviazione standard delle fluttuazioni della parte di fase di t_a e ω_0 e' la frequenza centrale della banda passante del rivelatore (per la definizione di queste grandezze vedi M. Cerdonio et al. Phys. Rev. Lett. (1994)).

Nella figura e' riportato l'andamento dei dati sperimentali relativi a tests sul tempo di arrivo di un segnale. I tests sono stati eseguiti su di una antenna a temperatura ambiente applicando una forza impulsiva all'antenna e cercando sui dati filtrati con M il tempo in cui il segnale era massimo.

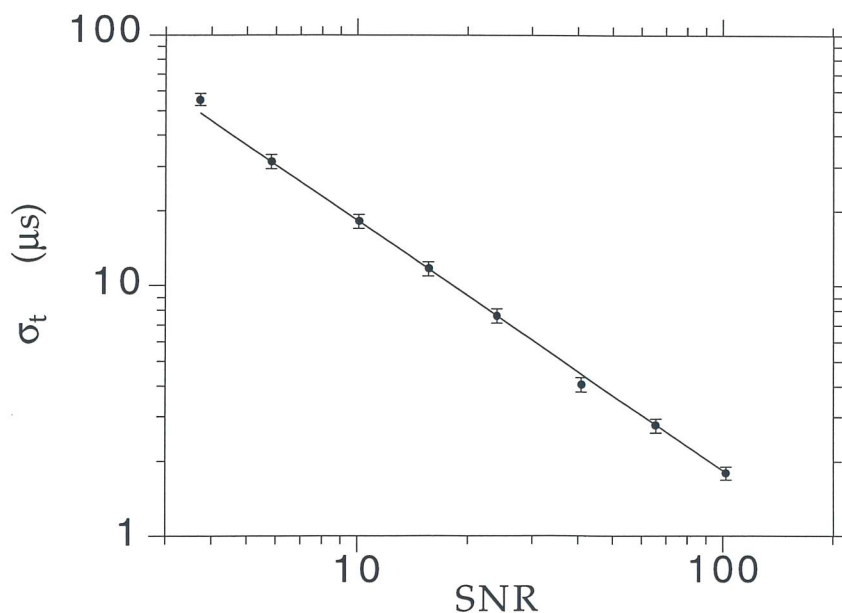


Fig. 3

In figura abbiamo riportato la dipendenza da SNR dell'indeterminazione sul tempo di arrivo di un impulso relativa alla sola parte di fase. I dati provengono da un run sperimentale con una antenna a temperatura ambiente; la retta non e' un fit ma e' il grafico dell'equazione A1 con $\omega_0 = 2\pi 870 \text{ Hz}$

APPENDICE B

Vogliamo mostrare in dettaglio come l'operazione di filtraggio $Y(\omega) = \left(\frac{H^*(\omega)}{S(\omega)} X(\omega) \right)$ possa essere trasformata, nel dominio del tempo discreto, in un processo ARMA. Osserviamo che la trasformata di Laplace di $M(\omega)$ puo' essere espressa nel piano complesso $s=(\omega, i\tau)$ come

$$M(s) = \sum_{n=1}^P \left(\frac{a_n}{s - q_n} + \frac{a_n^*}{s - q_n^*} \right) + \sum_{n=1}^P \left(\frac{b_n}{-s - q_n} + \frac{b_n^*}{-s - q_n^*} \right), \quad (B1)$$

e quindi, applicando la trasformata di Laplace inversa ad $M(s)$, siamo in grado di scrivere esplicitamente la funzione con cui dobbiamo convolvere i dati RAW nel dominio del tempo per ottenere i dati filtrati

$$m(t) = \sum_{n=1}^P \left(a_n \cdot e^{q_n t} + a_n^* \cdot e^{q_n^* t} \right) \Big|_{t \geq 0} - \sum_{n=1}^P \left(b_n \cdot e^{-q_n t} + b_n^* \cdot e^{-q_n^* t} \right) \Big|_{t \leq 0}, \quad (B3)$$

dove abbiamo separato la parte causale ($t > 0$) dalla parte acausale ($t < 0$) del filtro. Per un sistema a tempo discreto, quale e' l'output dell'antenna dopo il campionamento, i campioni che rappresentano la maschera si possono scrivere come:

$$m_k \equiv m(kT) = \sum_{n=1}^P \left(a_n \cdot e^{q_n \cdot k \cdot T} + a_n^* \cdot e^{q_n^* \cdot k \cdot T} \right) \Big|_{t \geq 0} - \sum_{n=1}^P \left(b_n \cdot e^{-q_n \cdot k \cdot T} + b_n^* \cdot e^{-q_n^* \cdot k \cdot T} \right) \Big|_{t \leq 0}, \quad (B4)$$

dove T è al solito il tempo di campionamento. La trasformata Z di m_k risulta

$$M(z) = \sum_k \sum_{n=1}^P \left(a_n \cdot e^{q_n \cdot k \cdot T} + a_n^* \cdot e^{q_n^* \cdot k \cdot T} \right) \cdot z^{-k} - \sum_k \sum_{n=1}^P \left(b_n \cdot e^{-q_n \cdot k \cdot T} + b_n^* \cdot e^{-q_n^* \cdot k \cdot T} \right) \cdot z^k \quad (B5)$$

e scambiamo l'ordine delle sommatorie otteniamo

$$M(z) = \sum_{n=1}^P \left(a_n \cdot \sum_m e^{q_n \cdot m \cdot T} \cdot z^{-m} + a_n^* \cdot \sum_m e^{q_n^* \cdot m \cdot T} \cdot z^{-m} \right) - \sum_{n=1}^P \left(b_n \cdot \sum_m e^{-q_n \cdot m \cdot T} \cdot z^m + b_n^* \cdot \sum_m e^{-q_n^* \cdot m \cdot T} \cdot z^m \right); \quad (B6)$$

poichè le sommatorie più interne sono serie geometriche, possiamo sommarle esplicitamente^(*) per cui risulta

$$M(z) = \sum_{n=1}^P \left(\frac{a_n}{1 - e^{q_n \cdot T} \cdot z^{-1}} + \frac{a_n^*}{1 - e^{q_n^* \cdot T} \cdot z^{-1}} \right) + \sum_{n=1}^P \left(\frac{-b_n}{1 - e^{q_n \cdot T} \cdot z} + \frac{-b_n^*}{1 - e^{q_n^* \cdot T} \cdot z} \right) . \quad (B7)$$

Riordinando i coefficienti delle potenze di z possiamo esprimere $M(z)$ come rapporto di polinomi in z^{-1} per la parte causale e in z per la parte acausale

$$M(z) = \sum_{n=1}^P \frac{\sum_{i=0}^1 A_i^n \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^1 C_i^n \cdot z^{-i}} + \sum_{n=1}^P \frac{\sum_{i=0}^1 B_i^n \cdot z^i}{\sum_{i=0}^1 C_i^n \cdot z^i} , \quad (B8)$$

dove le A_i^n, B_i^n e C_i^n sono dati dalle equazioni (18)

Poichè $M(z)$ è la trasformata Z della relazione $M(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{S(\omega)}$ allora $Y(z) = M(z) \cdot X(z)$ rappresenta la trasformata Z della relazione $Y(\omega) = \left(\frac{H^*(\omega)}{S(\omega)} X(\omega) \right)$. In particolare separando la parte causale da quella acausale si ottiene

$$Y(z) = \sum_{n=1}^P (Y_n^+(z) + Y_n^-(z)) , \quad (B9)$$

dove la parte causale e' data da

$$Y_n^+(z) = \frac{\sum_{i=0}^1 A_i^n \cdot z^{-i}}{\sum_{i=0}^1 C_i^n \cdot z^{-i}} \cdot X(z) , \quad (B10)$$

mentre la parte acausale e'

$$Y_n^-(z) = \frac{\sum_{i=0}^1 B_i^n \cdot z^i}{\sum_{i=0}^1 C_i^n \cdot z^i} \cdot X(z) . \quad (B11)$$

(*)

$$\sum_m (e^{q_n \cdot T} \cdot z^{-1})^m = \frac{1}{1 - e^{q_n \cdot T} \cdot z^{-1}} \quad \text{per } q_n < 0$$

$$\sum_m (e^{q_n \cdot T} \cdot z^1)^m = \frac{1}{1 - e^{q_n \cdot T} \cdot z^1} \quad \text{per } q_n > 0$$

Portando i denominatori a primo membro ed applicando la trasformata Z inversa si ottiene finalmente

$$\sum_{i=0}^2 C_i^n \cdot y_n^+(n-i) = \sum_{i=0}^1 A_i^n \cdot x(n-i) \quad (B12)$$

$$\sum_{i=0}^2 C_i^n \cdot y_n^-(n+i) = \sum_{i=0}^1 B_i^n \cdot x(n+i) ,$$

dove $y_n^+(n)$ e $y_n^-(n)$ sono le trasformate Z inverse di $Y_n^+(z)$ e $Y_n^-(z)$. Normalizzando per C_0^n le costanti arriviamo alla forma finale del processo ARMA che ci permette di calcolare nel dominio del tempo i dati filtrati $y(k)$ a partire dai dati RAW $x(k)$:

$$y(l) = \sum_{n=1}^P (y_n^-(l) + y_n^+(l))$$

$$y_n^+(l) = -\sum_{i=1}^2 C_i^n \cdot y_n^+(l-i) + \sum_{i=0}^1 A_i^n \cdot x(l-i)$$

$$y_n^-(l) = -\sum_{i=1}^2 C_i^n \cdot y_n^-(l+i) + \sum_{i=0}^1 B_i^n \cdot x(l+i)$$

APPENDICE C

In questa appendice vogliamo giustificare il criterio seguito per costruire i buffers di dati filtrati a partire da buffers di dati RAW. Un processo ARMA non è altro che la soluzione di un'equazione differenziale a coefficienti costanti calcolata per segnali discreti, pertanto esso è composto da due parti, una corrispondente alla soluzione dell'equazione omogenea associata (dipendente dalle condizioni iniziali) ed un'altra relativa alla soluzione particolare (a cui siamo interessati).

In particolare, considerando la relazione causale per un singolo polo e tralasciando l'indice n che contraddistingue i diversi poli, abbiamo, per ogni polo, l'equazione ricorsiva

$$\sum_{i=0}^2 C_i \cdot y^+(l-i) = \sum_{i=0}^1 A_i \cdot x(l-i) \quad (C1)$$

con la corrispondente l'equazione omogenea associata

$$\sum_{i=0}^2 C_i \cdot y^+(n-i) = 0 \quad (C2)$$

Consideriamo ora soluzioni della forma $y^+(l) = \lambda^l$ dell'equazione precedente. Se consideriamo il caso $l=2$ otteniamo dall'eq. (C1) il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea

$$(\lambda^2 + C_2 \cdot \lambda + C_1) = 0 \quad (C3)$$

e mediante le soluzioni $\bar{\lambda}$ e $\bar{\lambda}^*$ di questa equazione possiamo scrivere la più generale soluzione dell'equazione ricorsiva C1

$$y^+(l) = C_1 \cdot (\bar{\lambda})^l + C_2 \cdot (\bar{\lambda}^*)^l \quad (C4)$$

Dalla definizione delle costanti C_1 e C_2 segue che il polinomio caratteristico può essere fattorizzato come

$$(1 - e^{q \cdot T} \cdot \lambda^{-1})(1 - e^{q^* \cdot T} \cdot \lambda^{-1}) ; \quad (C5)$$

pertanto le sue radici sono la coppia di numeri complessi coniugati:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= e^{q \cdot T} \\ \bar{\lambda}^* &= e^{q^* \cdot T} \end{aligned} \quad (C6)$$

Sostituendo queste soluzioni nella (C4) avremo che la soluzione più generale dell'equazione omogenea diventa

$$y^+(l) = C_1 \cdot e^{l \cdot q \cdot T} + C_2 \cdot e^{l \cdot q^* \cdot T} \quad (C7)$$

Per ogni polo possiamo separare la parte immaginaria da quella reale $q_n = i\omega_n + \frac{1}{2\tau_n}$ e quindi riscrivere la C5 come

$$y_n^+(l) = e^{-\frac{l \cdot T}{\tau_n}} \cdot [C_1^n \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot l \cdot T} + C_2^n \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot l \cdot T}] \quad (C8)$$

Quando $lT > 4\tau_{opt}$, dove τ_{opt} rappresenta il massimo dei τ_n (e questa e' la nostra definizione di banda ottima), $e^{-\frac{l \cdot T}{\tau_n}}$ diviene trascurabile e quindi gli effetti legati alle condizioni iniziali tendono a zero per ogni polo. In altre parole dopo un tempo pari a $4\tau_{opt}$ nella soluzione dell'equazione differenziale rimane solo la soluzione particolare. Scartando dal buffer di dati filtrati le parti finali ed iniziali, corrispondenti a $4\tau_{opt}$, si eliminano dunque i segnali spuri sorti per aver arbitrariamente posto uguali a zero $y(1)$ ed $y(2)$ nell'applicare la parte causale della maschera e $y(N)$ ed $y(N-1)$ la parte acausale.

$$y(n) = \sum_{k=-M}^M m(n-k)x(k) \quad (D1)$$

in questo caso abbiamo per ogni dato di output:

M	moltiplicazioni reali
M-1	addizioni reali.

La figura 4 mostra il numero di moltiplicazioni e addizioni reali in funzione della lunghezza M del filtro per i tre metodi suddetti.

NOTA: Prevedendo per l'antenna AURIGA P=3, lunghezza del filtro pari a $4\tau_{opt}$, frequenza di campionamento 5 KHz e $\tau_{opt}=0.025$ sec abbiamo nei tre casi

ARMA

24 moltiplicazioni e 23 addizioni;

Overlap save method

FFT di 2^{12} punti (N= 2^{12} ed M=500)

60 moltiplicazioni e 89 addizioni

Metodo diretto

500 moltiplicazioni e 499 addizioni

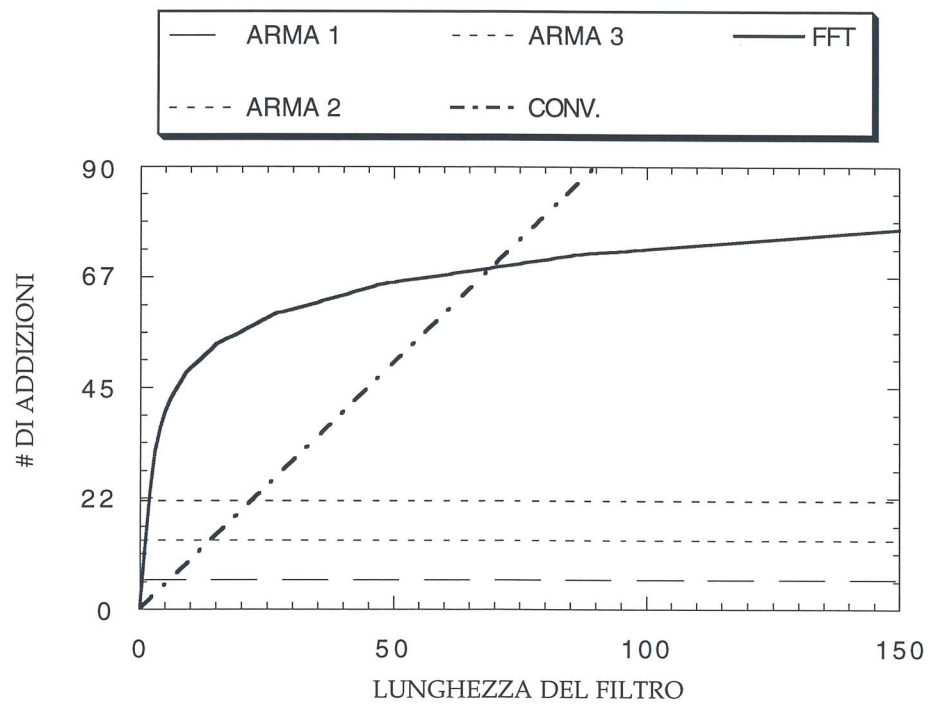
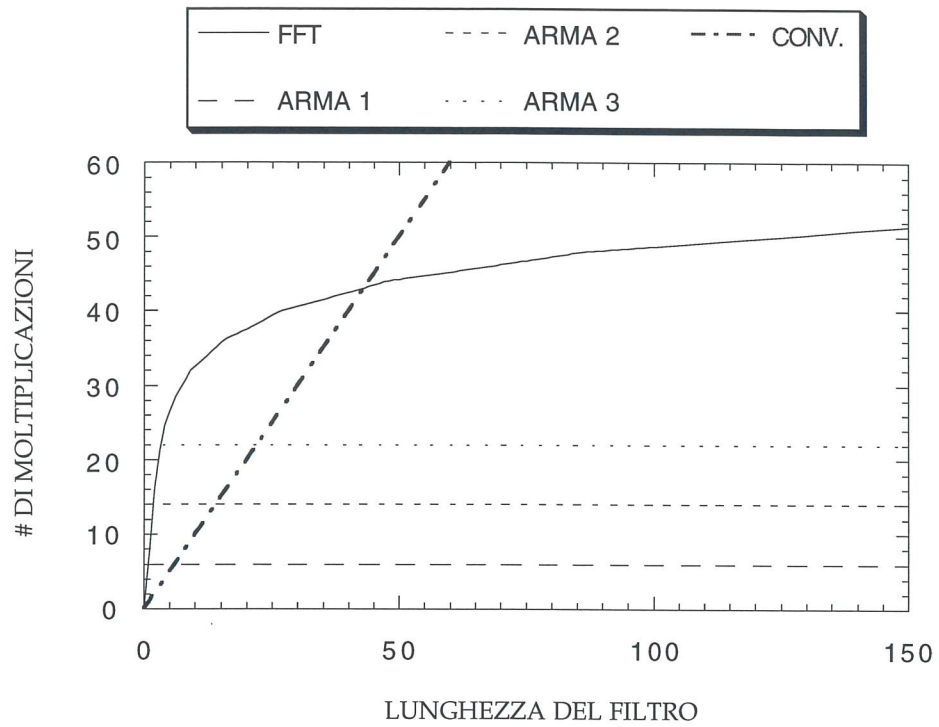


Fig. 4

Confronto tra diversi metodi di filtraggio da cui risulta la convenienza del filtraggio ARMA non appena la lunghezza del filtro supera i 10-15 campioni.

APPENDICE E

Calcoliamo l'energia del segnale e del rumore su tempi di integrazioni della durata T_s del segnale. All'ingresso dell'antenna il segnale e' dato da

$$F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(\omega) \quad (E1)$$

mentre all'uscita del filtro il segnale diventa

$$F'(\omega) = W(\omega) F(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n W(\omega) \Phi_n(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \Phi_n(\omega) \quad (E2)$$

nel dominio del tempo abbiamo invece:

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k \varphi_k(t) \quad (E3)$$

Allora l'energia E_s del segnale di durata T_s e' data da

$$E_s = \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} f'^2(t) dt = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k c_l \lambda_l \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 \quad (E4)$$

Mentre l'energia media $\langle E_N \rangle$ del rumore e' data da:

$$\langle E_N \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle c_{Nk}^2 \rangle \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sigma_{\delta}^2 T_s \quad (E5)$$

dove σ_{δ}^2 e' la varianza del rumore dopo il filtraggio.

L'ultima uguaglianza deriva dalla seguente relazione ricavata dalle teoria delle equazioni integrali :

$$\sigma_{\delta}^2 = R(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_k(t)|^2$$

$$\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} R(0) dt = \sigma_{\delta}^2 T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} |\varphi_k(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \quad (E6)$$

APPENDICE F

Per stimare la temperatura termodinamica dell'antenna bisogna stimare l'area dello spettro di potenza del rumore al di sotto dei picchi dei modi normali. A temperature ultracriogeniche il Q-fattore di questi modi potrebbe essere $\approx 10^7$. Questo implica che, per raggiungere la risoluzione in frequenza necessaria, dobbiamo eseguire una FFT su un buffer di dati al limite delle attuali possibilita'di memoria RAM delle workstations di analisi. Inoltre per una buona stima dei coefficienti bisogna mediare almeno 100 periodogrammi ma, daltro canto, la frequenza di risonanza dei modi non e' fissa a causa della deriva dovuta alla lentissima perdita di carica del trasduttore. Risulta conviene dunque, demodulare il segnale con un Lock-in numerico in modo da ridurre drasticamente il numero di dati su cui eseguire la FFT. Vediamo come funziona un Lock-in nell'ipotesi che nel sistema sia presente un solo modo normale per cui funzione di trasferimento e spettro di potenza del rumore sono riportate in Appendice H. L'operazione "Lock-in" sui dati RAW si divide in due parti:

- 1) moltiplicazione dei dati per una sinusoide alla frequenza di "reference" $p_r \equiv \text{Re}\{p\}$ formando la sequenza di numeri complessi

$$\hat{z}(t) \equiv \hat{x}(t) + i\hat{y}(t) = y(t) e^{i\text{Re}\{p\}t} \quad (\text{F1})$$

- 2) integrazione con una costante di tempo $1/p_{lk}$

$$z(t) \equiv x(t) + iy(t) = \frac{p_{lk}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-t')p_{lk}} \hat{z}(t') \vartheta(t-t') dt' \quad (\text{F2})$$

la funzione di trasferimento normalizzata dell'operazione di integrazione e'

$$L(\omega) = \frac{p_{lk}}{ip_{lk} + \omega} \quad \text{con } p_{lk} \text{ reale} < 0 \quad (\text{F3})$$

che viene applicata ai dati demodulati

$$\hat{Z}(\omega) = H(\omega - p_r) = \frac{h}{ip_i + \omega} + \underbrace{\frac{h}{-ip_i + 2p_r - \omega}}_{\text{contributo trascurabile}}. \text{ Nel dominio del tempo la}$$

risposta ad un impulso δ arrivato al tempo t_a e'

$$z(t) \equiv x(t) + iy(t) = \frac{h p_{lk}}{p_{lk} - p_i} \left[e^{-p_i(t-t_a)} - e^{-p_{lk}(t-t_a)} \right] e^{ip_r t_a} \vartheta(t_a) \quad (\text{F4})$$

Il massimo di questa funzione si trova al tempo $t_m = t_a + \frac{\text{Log}(p_{lk}) - \text{Log}(p_i)}{p_{lk} - p_i}$
(sempre piu' grande del vero tempo di arrivo).

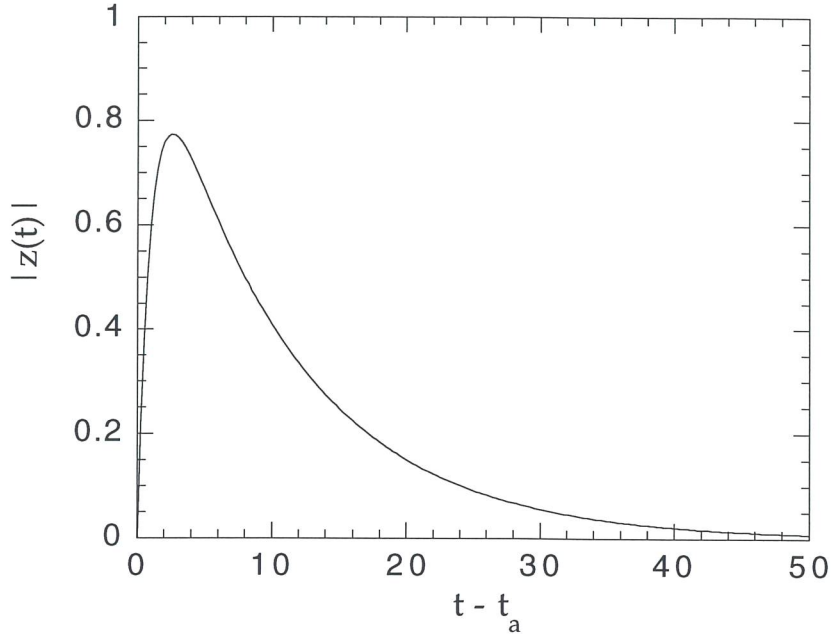


Fig. 5

*Il tempo di salita di un impulso all'uscita di un Lock-in e' determinato da $1/p_{lk}$ mentre il tempo di decadimento e' determinato da $1/p_i$.
Nell'esempio in figura $1/p_{lk}=1$ e $1/p_i=0.1$.*

Per quanto riguarda il rumore dopo la prima operazione del Lock-in abbiamo lo spettro di potenza dei dati demodulati

$$P'(\omega) \equiv P(\omega - p_r) = K + \frac{a}{i p_i + \omega} + \underbrace{\frac{a^*}{-i p_i + 2 p_r - \omega} + \frac{a}{i p_i - 2 p_r + \omega}}_{\text{contributi trascurabili}} + \frac{a^*}{-i p_i^* + \omega} \quad (\text{F5})$$

mentre dopo l'integrazione, abbiamo per le due componenti x e y i seguenti spettri

$$\begin{aligned} P_{xx}(\omega) = P_{yy}(\omega) &= \frac{p_{lk}^2}{p_{lk}^2 + \omega^2} \left[K + \text{Re} \left\{ \frac{a}{i p_i + \omega} + \frac{a^*}{-i p_i + \omega} \right\} \right] \\ P_{xy}(\omega) = -P_{yx}(\omega) &= \frac{i p_{lk}^2}{p_{lk}^2 + \omega^2} \left[K + \text{Im} \left\{ \frac{a}{i p_i + \omega} + \frac{a^*}{-i p_i + \omega} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{F6})$$

e la varianza del rumore dopo l'operazione LK e l'integrazione diviene

$$\sigma_{lk}^2 = K p_{lk} + \text{Im}\{a\} \frac{P_{lk}}{P_{lk} + P_i} ; \quad (\text{F7})$$

si noti che il primo termine rappresenta il contributo del rumore a banda larga sulla banda di integrazione del Lock-in mentre il secondo termine e' una frazione del contributo a banda stretta (per il teorema dei residui $\text{Im}\{a\}$ e' proprio l'area al di sotto del picco dello spettro). Per un filtraggio con $p_i / p_{lk} \ll 1$ (viene pero' distorto il picco dello spettro) abbiamo

$$\sigma_{lk}^2 = K p_{lk} + \text{Im}\{a\} \frac{P_i}{P_{lk}} , \quad (\text{F8})$$

da cui si vede chiaramente che esiste un tempo di integrazione ottimo

$p_{lk}^{opt} = \sqrt{\frac{a_i}{K p_i}} p_i$ che rende minima la varianza del rumore e rende uguale il contributo a banda larga a quello a banda stretta (ma evidentemente non ottimizza SNR). Se invece vogliamo misurare $\text{Im}\{a\}$ conviene scegliere p_{lk} in modo da rendere trascurabile il contributo del rumore a banda larga K ($p_{lk} \ll \frac{\text{Im}\{a\}}{K}$) e stimare l'area sotto il picco $\text{Im}\{a\}$ direttamente con σ_{lk}^2 .

APPENDICE G

Nel dominio della frequenza il filtraggio, secondo la teoria di Wiener-Kolmogorof, corrisponde alla moltiplicazione dei dati per la maschera $M(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{S(\omega)}$. Per un'antenna gravitazionale risonante $H(\omega)$ ed $S(\omega)$ sono sempre esprimibili sotto forma di frazioni parziali

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^P \left(\frac{h_n}{p_n + \omega} + \frac{h_n^*}{p_n^* - \omega} \right) \quad (G1)$$

$$S(\omega) = K + \sum_{n=1}^P \left(\frac{a_n}{p_n + \omega} + \frac{a_n^*}{p_n^* - \omega} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n}{p_n - \omega} + \frac{a_n^*}{p_n^* + \omega} \right),$$

dove P e' il numero di poli p_k della funzione di trasferimento, K e' il livello del rumore a banda larga e $\text{Im}\{p_k\} < 0$ dato che $H(\omega)$ e' causale. Vogliamo dimostrare che, in generale, anche per M vale la seguente scomposizione in frazioni parziali:

$$M(\omega) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n}{q_n + \omega} + \frac{a_n^*}{q_n^* - \omega} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{b_n}{q_n - \omega} + \frac{b_n^*}{q_n^* + \omega} \right). \quad (G2)$$

Dalla forma analitica di $H(\omega)$ e di $S(\omega)$ (polinomi in ω) discende che i poli di $M(\omega)$ coincidono con gli zeri di $S(\omega)$ e che il grado del polinomio al numeratore è inferiore al grado del polinomio al denominatore. Da questo segue che $M(\omega)$ può essere scomposta come:

$$M(\omega) = \sum_{n=1}^P \frac{a_n}{q_n + \omega} + \frac{a_n'}{q_n^* - \omega} + \frac{b_n}{q_n - \omega} + \frac{b_n'}{q_n^* + \omega}, \quad (G3)$$

dove a_n, a_n', b_n e b_n' sono 4P numeri complessi; per le note proprietà dello spettro di potenza e della trasformata di Fourier di una funzione reale abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} S^*(\omega) &= S(-\omega) \\ S(-\omega) &= S(\omega) \\ H^*(\omega) &= H(-\omega) \end{aligned} \quad (G4)$$

da cui segue $M^*(\omega) = \frac{H(\omega)}{S(\omega)} = \frac{H^*(-\omega)}{S(-\omega)} = M(-\omega)$, giustificando così i vincoli

$a_n' = a_n^*$ e $b_n' = b_n^*$ che abbiamo imposto sui residui della maschera.

APPENDICE H

Vogliamo studiare la dipendenza del rapporto S/N dai parametri della maschera nel caso sia presente nel sistema un solo modo normale; i risultati ottenuti si estendono facilmente al caso di piu' modi normali. Partiamo dall'osservazione che la funzione di trasferimento di un'antenna con un singolo polo puo' essere scritta (a parte una ininfluente costante moltiplicativa) come

$$H(\omega) = \frac{\omega}{(p + \omega)(p^* - \omega)} \quad (\text{H1})$$

mentre lo spettro di potenza del rumore puo' scrivere come

$$S(\omega) = \frac{(q + \omega)(q^* - \omega)(q - \omega)(q^* + \omega)}{(p + \omega)(p^* - \omega)(p - \omega)(p^* + \omega)} \quad (\text{H2})$$

Per le note proprieta' dei polinomi abbiamo

$$M(\omega) = \frac{H^*(\omega)}{S(\omega)} = \frac{\omega(p + \omega)(p^* - \omega)}{(q + \omega)(q^* - \omega)(q - \omega)(q^* + \omega)} \quad (\text{H3})$$

dove $\pm q, \pm q^*$ e $\pm p$ sono rispettivamente i poli e gli zeri di M. Lo spettro di potenza del rumore dopo il filtraggio diventa allora

$$W(\omega) = \frac{|H(\omega)|^2}{S(\omega)} = \frac{\omega^2}{(q + \omega)(q^* - \omega)(q - \omega)(q^* + \omega)} \quad (\text{H4})$$

Sia $M_A(\omega)$ la maschera costruita con dei parametri non ottimi

$$M_A(\omega) = \frac{\omega(p_A + \omega)(p_A^* - \omega)}{(q_A + \omega)(q_A^* - \omega)(q_A - \omega)(q_A^* + \omega)} \quad ; \quad (\text{H5})$$

in questo caso l'ampiezza di un segnale $\delta(t)$ dopo il filtraggio e' data da

$$S_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_A(\omega) H(\omega) d\omega \quad (\text{H6})$$

mentre il valore quadratico medio del rumore dopo il filtraggio e' dato da:

$$N_A = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_A(\omega) M_A^*(\omega) S(\omega) d\omega} \quad (\text{H7})$$

possiamo ora formare il rapporto $(S/N)_A = \frac{S_A}{N_A}$ e graficare la dipendenza di questo rapporto dalla variazione dei parametri p e q della maschera rispetto a quelli ottimi. I risultati sono riportati in fig. 6.

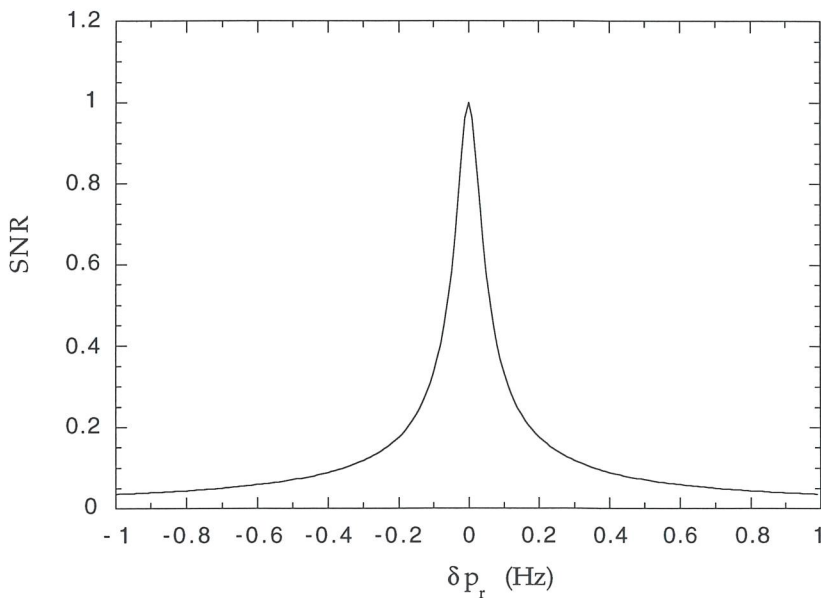
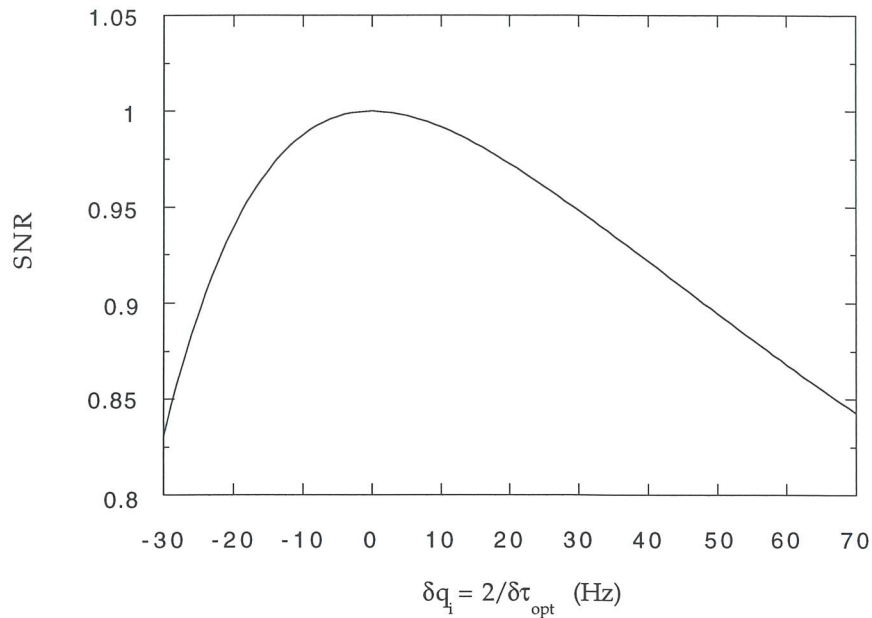


Fig 6

In figura sono riportati gli andamenti di SNR al variare di p_r e q_i . Lo zero delle ascisse corrisponde ai valori ottimi di $p_r \equiv \text{Re}\{p\}$ e $q_i \equiv \text{Im}\{q\}$ per i quali $\text{SNR}=1$. In questo esempio i valori ottimi sono: $p_r=2\pi 1000, \text{Hz}$ $p_i=0.001 \text{ Hz}$ $q_r=2\pi 1000, \text{Hz}$ $q_i=50) \text{ Hz}$

BIBLIOGRAFIA

- Barlow R., *Statistics*, (John Wiley 1989 N.Y.).
- Bevington P.R. Robinson D.K., *Data reduction and analysis for the physical sciences*, (MacGraw-Hill 1992).
- Biasotto M., *Il sistema di acquisizione dati dell'antenna gravitazionale AURIGA*, Tesi di laurea, (Padova 1994)
- Candy J.V., *Signal Processing the modern approach*, McGraw-Hill International Editions Electrical Engineering Series.
- Gossens M. e James F., *Minuit function minimization and error analysis*, (CERN Geneva 1990 Switzeland).
- Manolakis D.G. e Proakis J.G., *Digital signal processing*, (Macmillan Publishing Company 1990 ...).
- Oppenheim A.V. Schafer R.W. , *Elaborazione numerica dei segnali*, (Franco Angeli 1990).
- Ortolan A., Vedovato G., Cerdonio M. e Vitale S. (1994), *Optimal reconstruction of the input signal in resonant gravitational wave detectors: data processing algorithm and Physical limitations*, Phys. Rev. D 50 4737 (1994).
- Papoulis A., *Probability, random variables and stochastic processes*, (McGraw Hill 1984 New York).
- Press W.H. et al, *Numerical recipes in C: The Art of Scientific Computing*, (Cambridge Univ. Press 19.. Cambridge U.K)
- Vetterling W.T. et al (1992), *Numerical Recipes: Example Book [C]*, (Cambridge Univ. Press 19.. Cambridge U.K)
- Vitale S. *Signal and Noise, Lecture notes*. LNL-I.N.F.N. (REP) 71/92