

# **Realizzazione of high finesse resonant optical cavities vacuum magnetic birefringence with elipsometric techniques**

G. Ruoso



Giuseppe Ruoso

**Realization of high finesse resonant optical cavities to  
measure vacuum magnetic birefringence with  
ellipsometric techniques**



# Abstract

The work described in this thesis has been done within the PVLAS collaboration. PVLAS is an experiment designed to measure the vacuum birefringence induced by a magnetic field. It will be based on a very sensitive ellipsometer and a 9 T superconducting dipole magnet especially developed for this purpose. The magnet will rotate around its axis so as to modulate the effect. The detection will be performed using heterodyne techniques, and a high finesse Fabry-Pérot cavity will be used to amplify the effect.

The entire optical system for the detection of small birefringence, together with a high finesse Fabry-Pérot cavity, has been realized on a smaller scale and is described in this thesis. The best cavity obtained has a length of 78 cm and a finesse of 29000, corresponding to a cavity linewidth of 7 kHz. This cavity will permit an amplification of about 20000.

Measurements with an ellipsometer, coupled with the cavity, have reached a sensitivity of the order of  $10^{-7}$  rad/ $\sqrt{\text{Hz}}$ , only one order of magnitude worse than the shot noise limit.

The results obtained shows that the PVLAS experiment could perform a measurement of the magnetic vacuum birefringence with signal to noise ratio of one with an integration time of about 15 hours.



*Desidero ringraziare i Proff. Erseo Polacco, Emilio Zavattini, Massimo Nigro ed il Dott. Ruggero Pengo per i consigli avuti e l'aiuto prestatomi durante questo lavoro di tesi.*

*Il mio ringraziamento va inoltre a tutti gli amici e compagni dell'esperimento PVLAS, dei Laboratori di Legnaro e dei Dipartimenti di Fisica di Padova, Pisa e Trieste.*





# Indice

Indice delle figure . . . . .	iv
Indice delle tabelle . . . . .	vi
Introduzione . . . . .	vii
<b>1 Aspetti teorici e sperimentali riguardo la misura della birifrangenza magnetica del vuoto</b>	<b>1</b>
1.1 La birifrangenza del vuoto . . . . .	1
1.1.1 La lagrangiana di Heisenberg Euler . . . . .	1
1.1.2 Altre formulazioni e prime correzioni superiori . . . . .	2
1.1.3 Effetti dispersivi magnetici . . . . .	3
1.1.4 Correzioni di ordine superiore . . . . .	6
1.1.5 Esempio numerico . . . . .	8
1.2 Schema di un esperimento per la misura della birifrangenza magnetica . . . . .	8
1.2.1 L'esperimento PVLAS . . . . .	8
1.2.2 Il risonatore Fabry-Pérot . . . . .	9
1.2.3 Rivelazioni di piccoli segnali . . . . .	10
1.3 Precedenti storici . . . . .	14
1.3.1 Misure dirette . . . . .	14
1.3.2 Misure indirette . . . . .	16
1.4 Altre proposte in corso . . . . .	18
1.5 Mescolamento del fotone con particelle di massa piccola . . . . .	19
1.5.1 Rivelazione dell'assione . . . . .	20
1.5.2 L'assione e la propagazione del fotone . . . . .	21
1.5.3 La ricerca dell'assione nell'esperimento PVLAS . . . . .	23
1.5.4 Particelle scalari . . . . .	24
1.6 Fenomeni meno rilevanti . . . . .	24
<b>2 Metodo di misura: la tecnica eterodina ed il Fabry-Pérot</b>	<b>25</b>
2.1 Funzione di trasferimento di un Fabry-Pérot in presenza di birifrangenze . . . . .	25
2.2 Misura con la tecnica eterodina . . . . .	27
2.2.1 Matrici di Jones per gli elementi ottici . . . . .	27
2.2.2 Rivelazione del segnale . . . . .	29
2.2.3 rivelazione in riflessione . . . . .	31
2.3 Rapporto segnale rumore e tempo di misura . . . . .	32

2.4	Misura di diicroismi per la rivelazione dell'assione . . . . .	34
2.5	Calibrazione dell'apparato: effetto Cotton-Mouton . . . . .	36
2.6	Caratteristiche dell'ottica . . . . .	37
2.6.1	Specchi sferici e perdite per diffrazione . . . . .	37
2.6.2	Esempio numerico con scelta del raggio di curvatura . . . . .	40
2.6.3	Birifrangenza degli specchi . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Aggiungamento in frequenza di un laser ad una cavità Fabry-Pérot con la tecnica di Pound-Drever</b>	<b>44</b>
3.1	Generalità . . . . .	44
3.1.1	La sorgente luminosa e l'attuatore tensione frequenza . . . . .	46
3.2	Tecnica di Pound-Drever . . . . .	48
3.2.1	Il segnale di discriminazione . . . . .	50
3.2.2	Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria . . . . .	53
3.2.3	Banda di funzionamento e rapporto segnale rumore . . . . .	54
3.3	La modulazione di fase . . . . .	56
3.3.1	Modulazione di fase del laser . . . . .	56
3.4	Il circuito di amplificazione . . . . .	58
3.4.1	Schemi del circuito . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Caratteristiche delle cavità realizzate</b>	<b>62</b>
4.1	Generalità . . . . .	62
4.1.1	Schema generale dell'apparato . . . . .	63
4.1.2	Le cavità realizzate . . . . .	65
4.2	Caratteristiche dell'aggancio . . . . .	69
4.2.1	Misura di $D_V^0$ . . . . .	69
4.2.2	Spettri del segnale d'errore . . . . .	71
4.3	Caratteristiche del fascio trasmesso . . . . .	74
4.3.1	Rumore in ampiezza . . . . .	74
4.3.2	La polarizzazione . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Misure di ellissometria: sensibilità attese ed effetto Faraday nell'aria</b>	<b>78</b>
5.1	Rumori presenti nella misura . . . . .	78
5.1.1	Limiti richiesti sul rumore . . . . .	79
5.1.2	Effetto della birifrangenza del substrato degli specchi del FP . . . . .	81
5.2	Misure di sensibilità per ellissometri . . . . .	81
5.2.1	Misure di sensibilità con la cavità RAF1 . . . . .	81
5.2.2	Misure di sensibilità per la cavità RAF2 . . . . .	84
5.3	Misura dell'effetto Faraday nell'aria . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>89</b>

<b>A</b>	<b>Caratteristiche di un risuonatore Fabry-Pérot</b>	<b>91</b>
A.1	Funzione di trasferimento . . . . .	91
A.2	Aumento del cammino ottico . . . . .	94
A.3	Fabry-Pérot in presenza di dicroismo . . . . .	95
	<b>Referenze</b>	<b>97</b>

# Indice delle figure

1.1	Termine di interazione fotone-fotone . . . . .	3
1.2	Correzione con bosone $p$ a spin 0 . . . . .	3
1.3	Propagazione di un fotone in un campo esterno $B_0$ . . . . .	4
1.4	Correzione di ordine superiore . . . . .	6
1.5	Le prime correzioni radiative . . . . .	7
1.6	Schema del risonatore Fabry-Pérot . . . . .	9
1.7	Schema di principio per una misura di polarimetria . . . . .	11
1.8	L'esperimento PVLAS . . . . .	13
1.9	Interazione di un muone con il campo esterno . . . . .	17
1.10	Diagramma di Feynman per lo scattering della luce da un potenziale elettrico . . . . .	17
1.11	Risultati sperimentali concernenti lo scattering Delbruck su nuclei di tantalio . . . . .	18
1.12	(a) Particella con vertice a due fotoni e (b) effetto Primakoff. . . . .	19
1.13	Anomalia triangolare . . . . .	19
1.14	Rotazione dovuta ad assorbimento selettivo di una componente . . . . .	21
1.15	Produzione di assioni con riconversione . . . . .	21
1.16	Limiti superiori per l'inverso dell'accoppiamento assione-fotoni ( $g_{a\gamma\gamma} = 1/M$ ) dall'esperimento LAS. (a) Limiti dalla misura di rotazione. (b) Limiti dalla misura di ellitticità. . . . .	23
2.1	Schema del Fabry-Pérot con i campi incidente $E_a$ , riflesso $E_r$ e trasmesso $E_t$ . . . . .	25
2.2	Schema per la misura di piccole birifrangenze. . . . .	27
2.3	Tipico spettro di $I_{ph}$ . . . . .	31
2.4	Schema per la rivelazione in riflessione. . . . .	32
2.5	Schema della cavità piano concava . . . . .	38
2.6	Andamento della trasmittività di un FP con specchi birifrangenti, al variare della frequenza della luce incidente . . . . .	42
2.7	Parametri per la trasmittività di un FP con specchi birifrangenti . . . . .	43
3.1	Schema logico per la realizzazione di cavità risonanti ottiche . . . . .	44
3.2	Schema del circuito di controllo . . . . .	45
3.3	Schema del laser NPRO . . . . .	46
3.4	Andamento della frequenza di emissione al variare della temperatura del cristallo . . . . .	47
3.5	Schema della cavità del laser NPRO con il trasduttore piezoelettrico PZT . . . . .	48
3.6	Schema dell'agganciamento alla Pound-Drever . . . . .	49

3.7	Segnale d'errore, componenti in fase (a) e in quadratura (b), per una cavità con $\Delta\nu_c = 70$ kHz ed $L = 0.9$ m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ), avendo $\Omega_m = 717.7$ kHz. . . . .	52
3.8	Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria . . . . .	54
3.9	Grafico di $V_e/(\nu_N D_V^0) = D_V/D_V^0$ per una cavità con $\Delta\nu_c = 70$ kHz ed $L = 0.9$ m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ). . . . .	55
3.10	Modulazione di ampiezza residua al variare della frequenza di modulazione di fase sul laser per una tensione sul piezoelettrico di ampiezza 50 mV (Ruoso and Zavattini 1994). . . . .	57
3.11	(a) Schema a blocchi del circuito di amplificazione (Servo). (b) Andamento (scala log-log) delle funzioni di trasferimento per ciascun blocco . . . . .	60
3.12	Realizzazione circuitale dell'amplificatore . . . . .	61
4.1	Schema del set-up ottico per la realizzazione di cavità Fabry-Pérot . . . . .	64
4.2	Andamento del segnale trasmesso, ottenuto variando lentamente la frequenza del laser, per luce modulata in fase alla frequenza di 717.7 kHz. . . . .	65
4.3	Andamento della luce trasmessa da una cavità risonante in seguito alla mancanza del segnale d'ingresso . . . . .	67
4.4	Camera a vuoto per la realizzazione di Fabry-Pérot ad alta finezza (Fotografia e schema di realizzazione) . . . . .	68
4.5	Andamento sull'oscilloscopio del segnale d'errore per la cavità RAF1, $\beta = 0.9$ . . . . .	69
4.6	Schema per la misura dinamica di $D_V$ . . . . .	70
4.7	Densità spettrale $\tilde{\nu}_N$ della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF1. . . . .	72
4.8	Densità spettrale $\tilde{\nu}_N$ della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF2 . . . . .	73
4.9	Densità spettrale del segnale di correzione al laser, misurato sull'attuatore piezoelettrico $K$ . . . . .	73
4.10	Rumore in ampiezza (RIN) del laser libero, misurato alla distanza di 3 metri dalla sorgente . . . . .	74
4.11	Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF1. . . . .	75
4.12	Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF2. . . . .	75
4.13	Rumore in ampiezza (RIN), a bassa frequenza, della luce trasmessa dalla cavità RAF2. . . . .	76
5.1	Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF1 . . . . .	82
5.2	Segnale all'analizzatore di spettro per la misura di ellissometria con RAF1 . . . . .	83
5.3	Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF2 . . . . .	85
5.4	Misura di sensibilità con la cavità RAF2 e schema differenziale. Fondo ottenuto. . . . .	86
5.5	Schema per la misura dell'effetto Faraday nell'aria . . . . .	87
A.1	Schema del risuonatore . . . . .	91
A.2	Convenzioni per i campi del risuonatore . . . . .	92

# Indice delle tabelle

1.1	Contributi alla birifrangenza indotta da un campo esterno . . . . .	8
1.2	Miglioramento della misura di $\Delta n$ indotto da un campo magnetico esterno, $G$ è il fattore di guadagno . . . . .	16
2.1	Componenti del segnale trasmesso, l'ampiezza è in unità $I_0$ . . . . .	30
2.2	Componenti del segnale trasmesso, ampiezze in unità $\eta_{FP} I_0$ . . . . .	33
2.3	Componenti del segnale trasmesso per rivelazioni di rotazioni, ampiezze in unità $\eta_{FP} I_0$ . . . . .	35
2.4	Costanti di Cotton-Mouton per alcuni gas a pressione normale . . . . .	36
2.5	Valori di $R$ esclusi per non avere modi degeneri . . . . .	40
3.1	Caratteristiche del laser utilizzato . . . . .	47
3.2	RAM e $\beta$ al variare della frequenza e della tensione applicata al laser. Gli asterischi marcano i minimi locali. . . . .	58
4.1	Alcune fra le cavità macroscopiche già realizzate . . . . .	62
4.2	Caratteristiche delle cavità Fabry-Pérot realizzate . . . . .	67
4.3	Caratteristiche a regime del risonatore RAF1 . . . . .	70

# Introduzione

Il lavoro descritto in questa tesi di Dottorato si è svolto nell'ambito dell'esperimento PVLAS. Tale esperimento, frutto di una collaborazione fra le Università di Trieste, Pisa, Padova ed i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN, ha come scopo la misura della birifrangenza del vuoto indotta da un campo magnetico. Tale effetto di birifrangenza è previsto dalla elettrodinamica quantistica, diretta conseguenza del termine di 'interazione fotone-fotone'.

Con i campi magnetici attualmente realizzabili la birifrangenza che si ottiene è molto piccola ( $\Delta n \sim 10^{-22}$ ), e questo spiega perchè tale fenomeno non sia stato sinora osservato.

Nell'esperimento PVLAS un fascio laser linearmente polarizzato attraversa una regione di campo magnetico, in vuoto, di lunghezza 90 cm. A causa della birifrangenza magnetica la luce acquista una ellitticità che viene misurata con un ellissometro basato sulla tecnica eterodina. Per aumentare l'ellitticità da misurare si utilizza una cavità risonante ottica di tipo Fabry-Pérot, che consente di ottenere un percorso equivalente per il fascio luminoso  $2\mathcal{F}/\pi$  volte maggiore rispetto alla lunghezza del magnete,  $\mathcal{F}$  è la finezza della cavità. Come si vedrà in questa tesi, abbiamo ottenuto finezze intorno a 30000, e quindi il Fabry-Pérot si rivela un elemento indispensabile per la misura.

La sorgente luminosa deve essere agganciata in frequenza alla cavità in modo da ottenere un accoppiamento laser-cavità costante.

Il campo magnetico è fornito da un magnete superconduttore di tipo dipolare, disposto verticalmente e rotante attorno al proprio asse alla frequenza di 1 Hz. La rotazione del magnete induce sul fascio laser una ellitticità modulata nel tempo alla frequenza di 2 Hz, eliminando in tal modo i problemi connessi con la misura in continua. Si utilizzerà un magnete, costruito al CERN su progetto dell'ing. Morpurgo, già provato fino a 9 T e, si spera, utilizzabile fino a 10 T. Presso i Laboratori di Legnaro è in fase di costruzione il criostato del magnete che sarà terminato nel 1996. Entro lo stesso periodo sarà completata l'ottica e si potrà quindi procedere alle prime misure.

Ho iniziato a lavorare nell'esperimento nel marzo 1992, quando si stava ancora mettendo a punto il progetto e non era ancora iniziata l'attività sperimentale. Il mio lavoro si è concentrato sulla realizzazione del risuonatore Fabry-Pérot (FP) ad alta finezza, sulla stabilizzazione del laser e sulla costruzione del sistema per la misura di ellitticità.

Durante il primo anno di dottorato abbiamo lavorato con luce visibile (laser He-Ne) realizzando una cavità lunga 50 cm e finezza 300.

Quando si è reso disponibile un nuovo laser (Nd:YAG a stato solido), che poteva essere controllato in frequenza, si è quindi passati allo studio dei sistemi di agganciamento, realizzando questa volta una cavità di lunghezza 87 cm e finezza circa 2000. Per tale sistema si è ottenuto l'agganciamento laser-cavità FP con la tecnica di Pound-Drever. A tale scopo è stato progettato e costruito l'amplificatore ad alto guadagno utilizzato per il feedback. La modulazione di fase della luce, necessaria per la tecnica di Pound-Drever, è stata realizzata in modo innovativo agendo direttamente sulla sorgente laser.

La cavità di finezza 2000, indicata con RAF1 nella tesi, è stata realizzata in aria per semplicità. Ciò ha comportato un notevole rumore in ampiezza sul fascio trasmesso. Si è quindi passati a costruire una nuova cavità inserita in una camera a vuoto. Questo Fabry-Pérot, chiamato RAF2, ha una lunghezza di 78 cm e una finezza  $\mathcal{F} = 29000$ . Questo valore rappresenta il traguardo che ci eravamo posti all'inizio; si noti che il fattore di merito  $Q$  per la cavità RAF2 è dell'ordine di 50 miliardi. Tale cavità ha mostrato una notevole diminuzione del rumore in ampiezza della luce trasmessa, rispetto ai valori ottenuti con RAF1.

A questo punto, anziché migliorare le prestazioni dell'aggancio, abbiamo deciso di costruire un ellissometro completo che realizzasse su scala ridotta l'esperimento PVLAS, in modo da chiarirci i problemi connessi con l'apparato completo.

Con le cavità realizzate si sono quindi costruiti degli ellissometri per i quali abbiamo misurato la sensibilità. Le misure fatte sono da considerarsi preliminari, ma si sono già ottenute sensibilità per misure di ellitticità solamente un ordine di grandezza peggiori del livello shot. Si è visto che i problemi maggiori derivano dalla presenza di ellitticità causate dalla birifrangenza del substrato degli specchi del Fabry-Pérot. Si è però verificato che questo è un problema risolvibile con la rotazione degli specchi, il che indica che è possibile ottenere una sensibilità al livello shot.

La finezza circa 30000 e una misura al livello shot significano per l'esperimento PVLAS il raggiungimento di un rapporto segnale rumore pari ad uno con tempi di misura della decina di ore.

Nel primo capitolo di questa tesi si discute l'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto. L'esperimento PVLAS è presentato nelle sue caratteristiche di progetto, e si dà inoltre una breve panoramica storica di alcuni esperimenti che hanno ricercato effetti simili. Viene inoltre discussa la ricerca di particella leggera (Assione), che è possibile con lo stesso apparato.

Nel secondo capitolo si illustra la tecnica di misura, usando il formalismo delle matrici di Jones, e se ne ricava la sensibilità limite.

Il metodo di agganciamento in frequenza laser-cavità FP, con la descrizione dei circuiti di controllo, è presentato nel capitolo terzo.

Le cavità realizzate RAF1 e RAF2 sono descritte nel capitolo quarto. Sono presentate le caratteristiche dell'aggancio in frequenza del laser e quelle del fascio trasmesso dalle due



cavità.

Nel capitolo quinto si discutono le misure di sensibilità. Dopo una breve introduzione sui rumori associati a tali misure, vengono riportati i risultati sperimentali ottenuti. È inoltre presentata una misura dell'effetto Faraday nell'aria, effettuata per verificare sperimentalmente l'effetto di amplificazione della cavità Fabry-Pérot.

Si traggono quindi alcune conclusioni nell'ultimo capitolo.



# Capitolo 1

## Aspetti teorici e sperimentali riguardo la misura della birifrangenza magnetica del vuoto

### 1.1 La birifrangenza del vuoto

#### 1.1.1 La lagrangiana di Heisenberg Euler

La polarizzazione del vuoto in presenza di campi elettromagnetici è descritta in maniera semplice utilizzando la lagrangiana efficace di Heisenberg-Euler (1936, Weisskopf 1936). Essi derivarono tale lagrangiana nello studio della interazione della luce con la luce. Come risultato di questo studio determinarono la sezione d'urto fotone-fotone e la lagrangiana  $\mathcal{L}$  che descrive il fenomeno di polarizzazione citato. A causa della invarianza relativistica,  $\mathcal{L}$  può dipendere solamente dalle due espressioni  $S$  e  $P$ :

$$S = \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \quad P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (1.1)$$

e la sua espressione generale diventa (Bialinycky-Birula 1988), nel sistema di Gauss (Usato da qui in avanti)

$$\mathcal{L}_{HE} = -\frac{S}{4\pi} - \frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta} \left[ P \frac{\Re \cosh(\eta X/F_c)}{\Im \cosh(\eta X/F_c)} - \frac{F_c^2}{\eta^2} + \frac{2}{3} S \right] \quad (1.2)$$

ove  $\alpha$  è la costante di struttura fine,  $F_c$  è il campo critico:

$$F_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \quad (1.3)$$

e  $X^2$  è una combinazione lineare dei due invarianti (1.1)

$$X^2 = -2S + 2iP \quad (1.4)$$

Lo sviluppo di questa lagrangiana per poter poi arrivare a delle quantità misurabili è oltremodo complicato. Per quanto riguarda l'uso nei laboratori terrestri, ci si può senz'altro mettere nelle condizioni in cui i campi in gioco sono inferiori al valore critico  $F_c$

$$B \ll B_c = 4.4 \times 10^{13} \text{ gauss} \quad (1.5)$$

$$E \ll E_c = 4.4 \times 10^{13} \text{ statvolt/cm} = B_c$$

Si deve introdurre poi la condizione di campi lentamente variabili, ove per questo si intende che la variazione deve essere tale che:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{m_e c} |\nabla F| &\ll F \\ \frac{\hbar}{m_e c^2} \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| &\ll F \end{aligned} \quad (1.6)$$

qui  $F$  sta ad indicare genericamente il campo elettrico e quello magnetico. In tali approssimazioni si può scrivere lo sviluppo

$$\mathcal{L}_{HE} = -\frac{S}{4\pi} + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} [4S^2 + 7P^2] + .. \quad (1.7)$$

che sostituendo agli invarianti le espressioni (1.1) ci fornisce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HE} &= \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} [(E^2 - B^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + .. \\ &= \mathcal{L}_{em}^{(0)} + \mathcal{L}_{HE}^{(1)} + .. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Il termine  $\mathcal{L}_{em}^{(0)}$  è la lagrangiana elettromagnetica classica mentre  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  come resta qui definito è proprio la correzione che ci interessa e che rientrerà nei fenomeni che si andranno a studiare.

### 1.1.2 Altre formulazioni e prime correzioni superiori

Il termine correttivo  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  può essere calcolato anche con l'elettrodinamica quantistica. Tale lavoro è stato svolto da Schwinger (1951). Anche in questo caso la soluzione si ottiene più facilmente nel caso di campo e.m. a variazione lenta secondo le (1.6). Schwinger così facendo ottenne esattamente il termine  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  della (1.8), con la scelta per il campo di particelle quello associato ad un fermione (spin 1/2). E' possibile infatti considerare anche l'effetto dovuto alla presenza di particelle  $p$  a spin 0. Si trova in questo modo una correzione al termine precedentemente calcolato. La indichiamo con:

$$\mathcal{L}_{spin0}^{(1)} = \frac{\alpha^2}{90} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_p c)^3}{m_p c^2} \left[ \frac{7}{4} (E^2 - B^2)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.9)$$

ove  $m_p$  è la massa della particella a spin 0. Poichè il termine correttivo scala come la massa alla meno 4 ed il bosone più leggero è il pione che ha una massa circa 300 volte l'elettrone, si nota come  $\mathcal{L}_{spin0}^{(1)}$  sia praticamente trascurabile rispetto a  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$ .

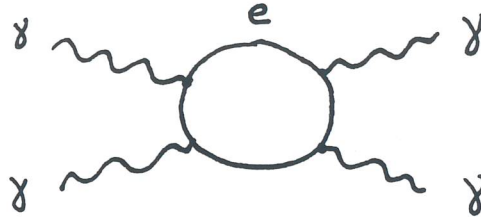


Figura 1.1: Termine di interazione fotone-fotone

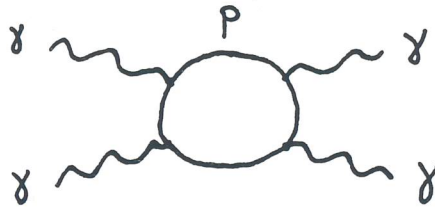


Figura 1.2: Correzione con bosone  $p$  a spin 0

Le lagrangiane esprimono, nel linguaggio dei grafici di Feynman, interazioni a 4 fotoni. Il grafico associato alla parte  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  è rappresentato in fig. 1.1, e viene generalmente chiamato 'interazione fotone-fotone', mentre quello di fig. 1.2 è associato al termine  $\mathcal{L}_{spin0}^{(1)}$ .

L'utilizzo dei diagrammi di Feynman permette di effettuare il calcolo in un modo diverso, come compare in Akhiezer-Berestetsky (1965), ed il risultato coincide con il precedente (Si veda anche riguardo allo studio del termine di interazione fotone-fotone Costantini *et al* (1971) e Karplus e Neuman (1950)).

### 1.1.3 Effetti dispersivi magnetici

Ci si pone ora in un sistema specifico, si va cioè a studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto in presenza di un campo magnetico esterno. La soluzione di tale problema si può cercare utilizzando le equazioni di Maxwell, che in assenza di cariche e correnti si scrivono:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

con

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{1.11}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

ove le (1.11) definiscono le grandezze (tensoriali) costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$ . Classicamente si ricava che  $\epsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . La soluzione risulta essere indipendente dalla presenza del campo magnetico esterno per la linearità delle equazioni stesse.

Tale soluzione rappresenta l'approssimazione al primo ordine del risultato che si ottiene partendo dalla lagrangiana di Heisenberg-Euler. Utilizzando le relazioni costitutive:

$$\mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} \quad \mathbf{H} = -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \tag{1.12}$$

e sostituendovi la lagrangiana (1.8) si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + A \left[ 4(E^2 - B^2)\mathbf{E} + 14(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \right] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} + A \left[ 4(E^2 - B^2)\mathbf{B} - 14(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} \right] \\ A &= \frac{\alpha^2 (\hbar/m_e c)^3}{90\pi m_e c^2} \simeq 1.32 \times 10^{-32} \text{cm}^3/\text{erg} \end{aligned} \tag{1.13}$$

I termini non lineari che si manifestano fanno sì che in questo caso non valga più il principio di sovrapposizione degli effetti. La propagazione di un'onda e.m. nel vuoto risentirà della presenza del campo magnetico esterno. L'entità di tali fenomeni, come si andrà a vedere, è piccola. Si noti che ora il grafico associato al processo è quello di fig. 1.3, in cui due fotoni sono forniti dal campo esterno (fotoni classici).

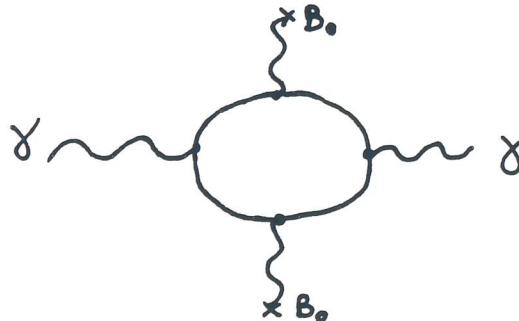


Figura 1.3: Propagazione di un fotone in un campo esterno  $B_0$

Ricerchiamo quindi una soluzione ad onda piana per l'onda (Adler 1971), con direzione di propagazione  $\mathbf{k}$ , per la quale considereremo due autostati linearmente polarizzati descritti da:

$$\mathbf{E}^{onda} = \mathbf{e}^{onda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{H}^{onda} = \mathbf{h}^{onda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Scriviamo nella (1.13)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{onda}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{onda} + \mathbf{B}_0$  con  $\mathbf{B}_0$  il campo magnetico esterno avente direzione  $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ . Poichè  $\mathbf{B}^{onda} \ll \mathbf{B}_0$ , si può scrivere, considerando solo i termini lineari nei campi  $\mathbf{E}^{onda}$  e  $\mathbf{B}^{onda}$ :

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} (1 - 4AB_0^2) + 14AB_0^2 \hat{b}_i \hat{b}_j \quad (1.15)$$

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} (1 - 4AB_0^2) - 8AB_0^2 \hat{b}_i \hat{b}_j$$

Si calcola l'indice di rifrazione per i due autostati di polarizzazione<sup>1</sup> dell'onda utilizzando la relazione:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (1.16)$$

Fissiamo per comodità il campo esterno in direzione ortogonale al vettore di propagazione della luce, si ottengono i seguenti modi:

**modo ||**) onda linearmente polarizzata con vettore  $\mathbf{E}^{onda}$  parallelo a  $\mathbf{B}_0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{||} &= 1 + 10AB_0^2 \\ \mu_{||} &= 1 + 4AB_0^2 \\ n_{||} &= 1 + 7AB_0^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

**modo  $\perp$** : onda linearmente polarizzata con vettore  $\mathbf{E}^{onda}$  perpendicolare a  $\mathbf{B}_0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= 1 - 4AB_0^2 \\ \mu_{\perp} &= 1 + 12AB_0^2 \\ n_{\perp} &= 1 + 4AB_0^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Risulta quindi:

---

<sup>1</sup>Viene qui usato un riferimento diverso, in cui si intende come vettore di polarizzazione quello elettrico e non quello magnetico come nella referenza citata (Adler 1971).

$$\begin{aligned}
\Delta n_{HE}^{(1)} = \Delta n_{QED} &= n_{\parallel} - n_{\perp} = 3AB_0^2 = \\
&= 3 \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} B_0^2 \simeq 4 \times 10^{-32} B_0^2
\end{aligned}
\tag{1.19}$$

per cui si ha che il vuoto in presenza di un campo esterno diventa un mezzo birifrangente.

### 1.1.4 Correzioni di ordine superiore

Come già chiarito nel lavoro di Adler (1971), la lagrangiana di Heisenberg-Euler, vista in termini di diagrammi di Feynman, contiene, fra tutti i grafici di interazione fotone-fotone che si possono formare, solo quelli ad anello ('loop diagrams'). Tali grafici sono tutti costituiti da un loop elettrone-positrone con intorno, per il teorema di Furry, un numero pari di gambe fotoniche.

Si può quindi passare al primo termine di ordine superiore per il processo considerato nel paragrafo precedente. Ad esso sarà associato il grafico di figura 1.4.

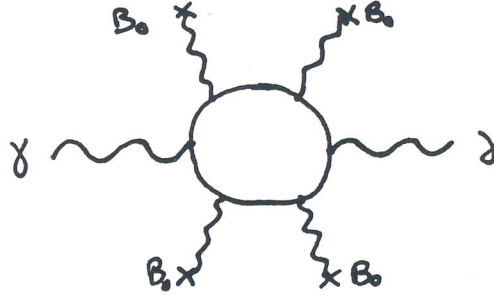


Figura 1.4: Correzione di ordine superiore

Adler(1970) riporta il risultato di un precedente calcolo (Toll 1952), in cui l'indice di rifrazione viene ricavato dai coefficienti di assorbimento attraverso le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig, segue:

$$\begin{aligned}
\Delta n &= n_{\parallel} - n_{\perp} = \Delta n_{HE}^{(1)} + \Delta n_{HE}^{(2)} = \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{B_0}{2B_{cr}} \right)^2 \left[ 0.13 + 0.20 \left( \frac{\hbar\omega}{2m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{B_0}{2B_{cr}} \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{1.20}$$

Ove  $\hbar\omega$  è l'energia del fotone e i coefficienti numerici che compaiono sono il risultato di un calcolo approssimato. Il primo termine fornisce una stima del  $\Delta n$  del paragrafo



precedente, ma la (1.20) è importante in quanto ci dà il comportamento del termine di correzione relativo al grafico di figura 1.4. Si ha:

$$\begin{aligned}\Delta n_{HE}^{(2)} &= 0.20 \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{B_0}{2B_c} \right)^4 \left( \frac{\hbar\omega}{2m_e c^2} \right)^2 = \\ &= 0.20 \left( \frac{45}{4} \right)^2 \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \right)^2 A^2 B_0^4 \simeq 10^{-70} B_0^4\end{aligned}\quad (1.21)$$

dove  $B_0$  è misurato in gauss. Tale effetto risulta essere molti ordini di grandezza più piccolo rispetto a quello principale, e quindi trascurabile.

L'ulteriore correzione che ci rimane da considerare è quella relativa ai grafici del tipo di figura 1.5.

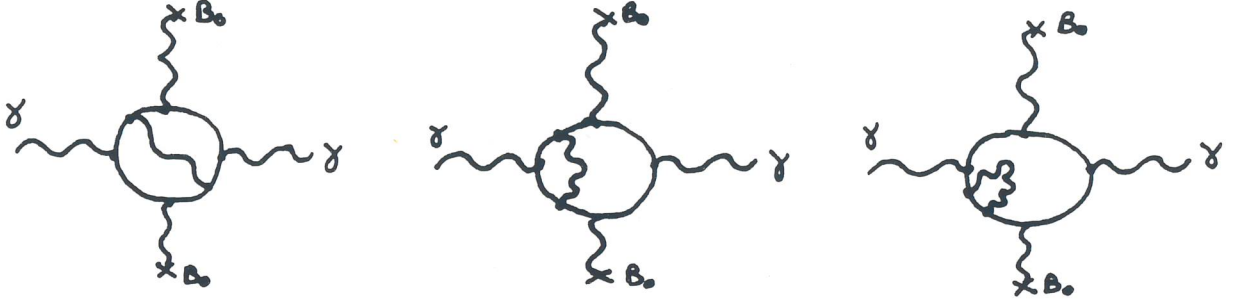


Figura 1.5: Le prime correzioni radiative

La lagrangiana efficace associata a tali processi è stata calcolata da Ritus (1976) e recentemente ricontrollata da D. Bakalov (comunicazione personale). Si trova che la prima correzione radiativa alla lagrangiana di Heisenberg-Euler, nel limite di basso campo esterno, vale:

$$\mathcal{L}_R^{(2)} = \frac{\alpha^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} \left[ \frac{16}{81} (E^2 - B^2)^2 + \frac{263}{162} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.22)$$

Possiamo quindi calcolare il contributo a  $\Delta n$  di queste correzioni radiative. Operando come fatto in precedenza si ricava:

$$\Delta n_R^{(2)} = \frac{5}{6} \frac{\alpha^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} = \frac{75}{4} \frac{\alpha}{\pi} A B_0^2 = 0.0145 \times 3 A B_0^2 \quad (1.23)$$

Si noti quindi come questa correzione equivalga circa all'uno per cento dell'effetto dominante, del quale rappresenta quindi la correzione più significativa. È la prima volta che viene riportata tale correzione nello studio di effetti non lineari della elettrodinamica quantistica, e tale termine potrà essere verificato in un esperimento che raggiunga una sensibilità sufficiente sulla misura di  $\Delta n_{HE}^{(1)}$  (Formula (1.19)).

### 1.1.5 Esempio numerico

Si vuole qui riassumere gli effetti considerati per poter confrontare tra loro le varie correzioni. Nelle ipotesi viste la birifrangenza di una regione di vuoto in presenza di un campo esterno è riassunta in tabella 1.1, assieme al valore che si otterrebbe per il  $\Delta n$  nel caso di un campo magnetico esterno di  $10^5$  gauss (10 tesla).

Effetto	Ampiezza	Valore con $B_0 = 10^5$ gauss	Vedi Formula
$\Delta n_{HE}^{(1)}$	$3AB_0^2$	$3.98 \times 10^{-22}$	(1.19)
$\Delta n_{HE}^{(2)}$	$0.20 \left(\frac{45}{4}\right)^2 \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\hbar\omega}{m_e c^2}\right)^2 A^2 B_0^4$	$\sim 10^{-49}$	(1.21)
$\Delta n_{spin0}^{(2)}$	$-24 \frac{\alpha^2}{90\pi} \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^3 \frac{1}{m_p c^2} B_0^2$	$\sim 10^{-31}$	(1.9)
$\Delta n_R^{(2)}$	$\frac{75}{4} \frac{\alpha}{\pi} AB_0^2$	$5.8 \times 10^{-24}$	(1.23)

Tabella 1.1: Contributi alla birifrangenza indotta da un campo esterno

## 1.2 Schema di un esperimento per la misura della birifrangenza magnetica

### 1.2.1 L'esperimento PVLAS

La misura dell'effetto quantistico di birifrangenza magnetica del vuoto descritto nella sezione precedente costituisce un passo fondamentale per la verifica della teoria dell'elettromagnetismo sino ad oggi sviluppata.

Si sta lavorando per la realizzazione di un esperimento, denominato PVLAS (Polarizzazione del vuoto e laser, si veda Bakalov 1994b), il cui scopo è la misura, con tecniche di ellissometria ottica, della birifrangenza prevista. Tale esperimento rappresenta lo sviluppo attuale di una proposta formulata da Iacopini e Zavattini (1979), che ha visto sinora diverse realizzazioni (si veda paragrafo 1.3.1), nelle quali la sensibilità raggiunta non è stata sufficiente per rivelare l'effetto cercato. In esso l'onda elettromagnetica incidente è un fascio laser, di lunghezza d'onda  $\lambda$ , polarizzato linearmente che si propaga all'interno di un campo magnetico. Un magnete superconduttore fornisce un campo, trasverso alla direzione di propagazione della luce, di tipo dipolare con una ampiezza dell'ordine di 10 tesla. A causa della birifrangenza del vuoto, fra le due componenti (parallela ed ortogonale) della polarizzazione, compare una differenza di fase  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} (n_{\parallel} - n_{\perp}) \quad (1.24)$$

La lunghezza d'onda della luce che si vuole utilizzare è  $\lambda = 1064$  nm mentre  $L = 0.9$  m è la lunghezza della regione di campo. Tale variazione di fase induce una ellitticità

sulla polarizzazione del fascio luminoso, massima qualora la polarizzazione iniziale sia a  $45^\circ$  rispetto alla direzione del campo esterno, e data da:

$$\psi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \pi \frac{L}{\lambda} \Delta n_{QED} \quad (1.25)$$

Come segue dai dati di tabella 1.1 la ellitticità attesa è in questo caso:

$$\psi = 1.06 \times 10^{-15} \quad (1.26)$$

tale valore rappresenta un limite estremo che richiede l'utilizzo di tecniche il più possibile avanzate.

### 1.2.2 Il risonatore Fabry-Pérot

Un risonatore Fabry-Pérot (Born e Wolf 1980) è costituito da una coppia di specchi paralleli separati da una distanza  $d$  ed aventi le superfici riflettenti verso l'interno (Figura 1.6).

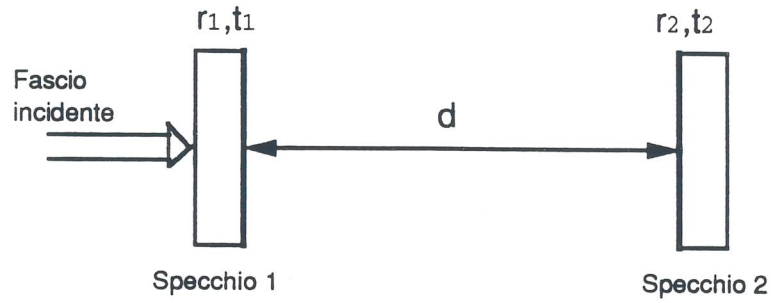


Figura 1.6: Schema del risonatore Fabry-Pérot

I parametri  $r_i, t_i$  sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e di trasmissione dello specchio  $i$ -esimo, per il quale resta definito il coefficiente  $\sigma$  tramite la relazione:

$$\sigma_i = r_i^2 + t_i^2 \quad (1.27)$$

Si può calcolare la trasmittività  $\mathcal{T}_{FP}$  e la riflettività  $\mathcal{R}_{FP}$  di tale sistema rispetto ad un fascio luminoso incidente sul primo specchio come da figura (Appendice A):

$$\mathcal{T}_{FP} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-1} \quad (1.28)$$

$$\mathcal{R}_{FP} = \frac{(\sigma_1 r_2 - r_1)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{\left[ 1 + 4 \frac{\sigma_1 r_1 r_2}{(\sigma_1 r_2 - r_1)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]}{\left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]} \quad (1.29)$$

Il parametro  $\delta$  è definito da:

$$\delta = 4\pi n \frac{d}{\lambda} \quad (1.30)$$

ove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo. La condizione di risonanza si ottiene per

$$\delta = 2\pi k \quad k = \text{numero intero} \quad (1.31)$$

e coincide con l'avere  $d$  pari ad un multiplo intero di  $\lambda/2$ . In risonanza  $\mathcal{T}_{FP}$  raggiunge un massimo e  $\mathcal{R}_{FP}$  un corrispondente minimo; l'intensità della luce che si propaga in cavità è molto maggiore di quella incidente, ed è legata a questa dalla relazione:

$$I_{interna} \simeq I_{inc} \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad (1.32)$$

ove  $\mathcal{F}$  è la finezza definita da:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (1.33)$$

valori che si possono ottenere per la finezza variano da 10 a  $10^5$ .

L'effetto della cavità sul fascio luminoso entrante è inoltre quello di allungare il cammino ottico effettivo. Nel caso considerato si può infatti definire una lunghezza efficace pari a (App. A):

$$L^{eff} = 2 \frac{\mathcal{F}}{\pi} d \quad (1.34)$$

Tale sistema diventa uno strumento efficace per la misura di piccoli effetti di birifrangenza. Riprendendo la relazione (1.25), e supponendo di inserire il campo magnetico all'interno di un Fabry-Pérot, per un tratto di lunghezza  $L$ , avremo:

$$\psi = \pi \frac{L^{eff}}{\lambda} \Delta n = 2\mathcal{F} \frac{\Delta n}{\lambda} L \quad (1.35)$$

Dai dati di tabella 1.1, posto ad esempio  $\mathcal{F} = 30000$  ed  $L = 90$  cm, si ottiene:

$$\psi \simeq 2.02 \times 10^{-11} \quad (1.36)$$

con un notevole miglioramento rispetto al caso precedente (vedasi (1.26)).

### 1.2.3 Rivelazioni di piccoli segnali

La rivelazione di piccole ellitticità in ottica si effettua generalmente adottando tecniche di polarimetria, si utilizza cioè una coppia di polarizzatori incrociati.

Seguendo la figura 1.7 indichiamo con P (Polarizzatore) ed A (Analizzatore) i due polarimetri incrociati. L'intensità  $I$  della luce sul fotorivelatore, detta  $I_0$  l'intensità prima dell'analizzatore, sarà data da:

$$I = I_0(\sigma^2 + \psi^2) \quad (1.37)$$

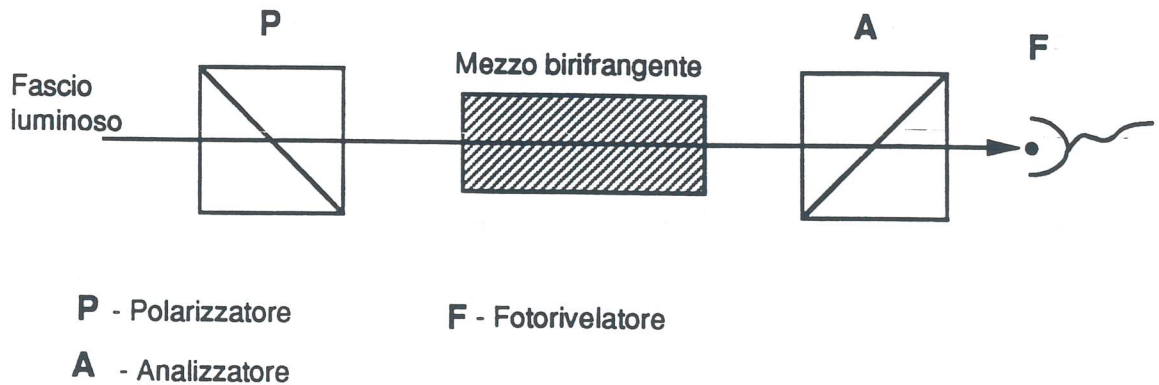


Figura 1.7: Schema di principio per una misura di polarimetria

ove  $\psi$  è l'ellitticità dovuta al mezzo birfrangente e  $\sigma^2$ , detta estinzione, dà la quantità di luce che si rivela comunque anche in assenza di un mezzo fra i polarimetri. Nel caso della birfrangenza del vuoto  $\psi$  è molto piccola, e  $\psi^2$  diventa trascurabile rispetto a  $\sigma^2$ , che anche avendo ottimi polarimetri raggiunge al meglio valori intorno a  $10^{-8}$ . Utilizzando la cosiddetta tecnica eterodina è possibile ottenere una linearizzazione della dipendenza del segnale al fotodiodo rispetto all'effetto che si vuole misurare. In tale tecnica si pone un elemento ottico che fornisce una ellitticità nota  $\eta$  fra i due polarimetri. Sia tale ellitticità modulata nel tempo, il segnale al fotodiodo ora si scrive:

$$I = I_0\{\sigma^2 + [\psi + \eta(t)]^2\} \quad (1.38)$$

$$\simeq I_0[\sigma^2 + \eta^2 + 2\eta(t)\psi] \quad (1.39)$$

L'analisi in frequenza di  $I$  permette di ricavare l'ampiezza  $\psi$  nota che sia la modulazione massima di  $\eta(t)$ .

Per la misura di ellitticità estremamente piccole si rende inoltre necessaria la loro modulazione. Si deve fare questo per eliminare gli effetti dovuti ad ellitticità non volute che si hanno nel sistema ottico e che si sommerebbero all'effetto cercato. La presenza di rumori a bassa frequenza (di tipo  $1/f$ ) richiede inoltre di eseguire la modulazione a frequenze le più elevate possibili.

Per modulare la birfrangenza magnetica del vuoto si possono essenzialmente adottare due schemi:

- a) modulare in ampiezza il campo magnetico esterno
- b) modificare l'angolo fra la polarizzazione della luce ed il campo magnetico esterno.

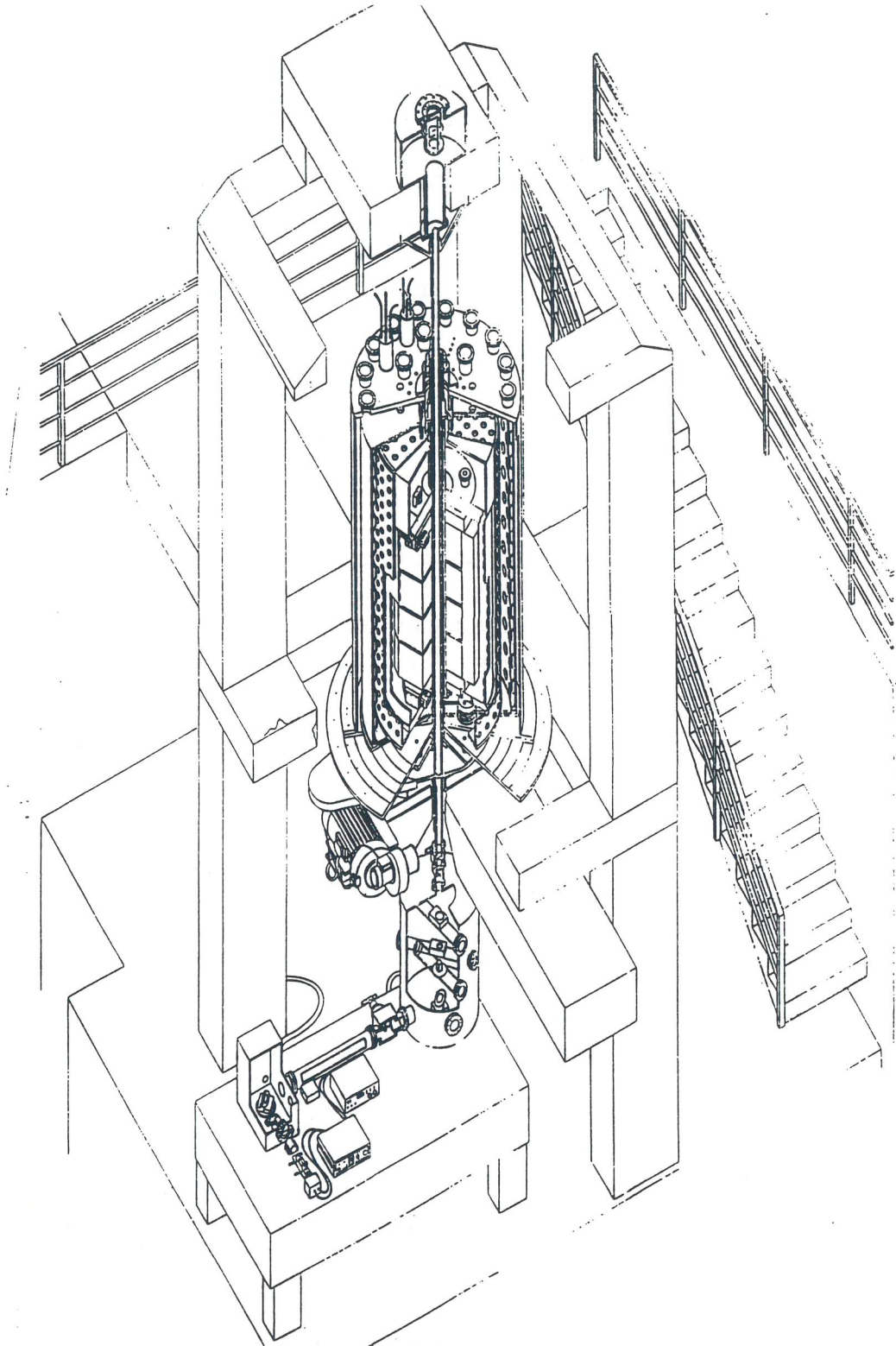
La soluzione a) è stata adottata in un precedente esperimento (Cameron *et al* 1993) ed ha come svantaggio che la frequenza di modulazione ha un limite superiore piuttosto basso (80 mHz). La soluzione b) è in corso di sviluppo nell'esperimento PVLAS, nella versione in cui il magnete viene fatto ruotare intorno all'asse del sistema ottico<sup>2</sup>. Lo sviluppo di un

<sup>2</sup>E' stata scartata la soluzione in cui era l'ottica a girare perchè in tale caso è più difficile mantenere costanti le elevate caratteristiche dell'ottica.

magnete superconduttore rotante si sta svolgendo presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN. L'intera struttura dell'apparato si può vedere in figura 1.8.

Si possono distinguere: il magnete inserito in un criostato ad elio superfluido che consente di mantenere la temperatura necessaria per la superconduttività anche durante la rotazione; una tavola rotante di supporto avente un foro centrale per il passaggio del fascio luminoso; una cavità Fabry-Pérot nella parte centrale. La frequenza di rotazione prevista per il magnete è di 1 Hz. L'effetto sulla polarizzazione dipende da  $B^2$  e quindi il segnale comparirà alla frequenza di 2 Hz.

Figura 1.8: L'esperienza PVLAS



## 1.3 Precedenti storici

### 1.3.1 Misure dirette

Gli effetti di campi magnetici esterni sulla propagazione di onde luminose nel vuoto sono stati soggetti di studio in diversi esperimenti. I fenomeni studiati non sempre erano indirizzati alla verifica della elettrodinamica quantistica.

Il primo esperimento fu senz'altro quello eseguito da Watson (1929). Utilizzando un elettromagnete avente un campo di  $10^4$  gauss, ed un Fabry-Pérot al suo interno, Watson ricercò variazioni nelle frange di interferenza dovute ad una possibile esistenza di un momento magnetico  $\mu_{ph}$  del fotone. I limiti che egli ricavò furono:

$$\mu_{ph} < 1.4 \times 10^{-22} \text{ e.m.u. } (1.4 \times 10^{-25} \text{ A m}^2) \quad (1.40)$$

$$\Delta n < 4 \times 10^{-11} \text{ gauss}^{-1} \quad (1.41)$$

Quest'ultima disuguaglianza è riportata esattamente come nell'articolo citato, ove non viene spiegata come è stata ottenuta. Notiamo che tale risultato è molto al di sopra dell'effetto previsto. Inoltre la non dipendenza quadratica dal campo ci chiarisce come fosse diverso l'effetto cercato.

Farr e Banwell (1932) ricercarono variazioni di velocità della luce dovute ad un campo magnetico esterno trasverso. Utilizzando un interferometro di Jamin con un braccio posto fra le estremità del dipolo di un elettromagnete che forniva un campo di 18000 gauss, non trovarono alcuna variazione di velocità al limite di:

$$\Delta v < 14 \text{ m/s} \quad (1.42)$$

corrispondente a

$$\Delta n < 5 \times 10^{-8} \quad (1.43)$$

In una successiva realizzazione (Banwell e Farr 1940) utilizzarono un interferometro di Michelson, ove ancora uno dei bracci era posto all'interno di una regione di campo magnetico. In tal caso fu misurato un effetto ma fu interpretato come errore sperimentale, e fu quindi dato il limite

$$\Delta n < 2 \times 10^{-9} \text{ con } B = 2 \times 10^4 \text{ gauss} \quad (1.44)$$

A mia conoscenza il primo a proporre verifiche sperimentali degli effetti dovuti al diagramma di interazione fotone-fotone è Erber (1961), il quale suggerisce la misura della rotazione  $\theta$  del piano di polarizzazione di un fascio luminoso:

$$\theta = \frac{\alpha l}{15 \lambda} \left( \frac{B}{B_{cr}} \right)^2 \quad (1.45)$$



con  $l$  lunghezza del cammino della luce nel campo magnetico. Si noti come ora la dipendenza rispetto al campo esterno è quadratica. Erber cita a proposito un esperimento di Jones (1961): usando un campo magnetico di 8000 gauss in un volume prismatico, egli cercò un angolo di deviazione della luce dovuto a rifrazione, utilizzando per la misura una 'leva ottica' avente una sensibilità per variazioni angolari di  $\delta = 5 \times 10^{-13}$  rad. Nessun effetto fu osservato, infatti tale angolo corrisponde ad un  $\Delta n$  pari a  $\delta/2$ , ma l'effetto previsto è molto più piccolo come desunto dalla tabella 1.1.

Iacopini e Zavattini (1979) proposero un diverso tipo di apparato per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto. Seguendo la loro linea logica diversi esperimenti sono stati realizzati (Iacopini *et al* 1980, Carusotto *et al* 1982, Cameron *et al* 1993). Lo schema generale, in questi casi, era simile al progetto PVLAS descritto nella sezione precedente, con le seguenti sostanziali variazioni:

- lunghezza d'onda della luce nel verde ( $\lambda = 514$  nm)
- se presente, allungamento del cammino ottico mediante una linea ottica di ritardo (cavità multipass)
- modulazione dell'effetto mediante variazione dell'ampiezza del campo tramite la corrente di alimentazione del magnete (In un caso (Carusotto *et al* 1982) si utilizzò un piccolo magnete rotante)
- campo magnetico con valori fra i 2 ed i 4 tesla

Nell'ultima realizzazione (Esperimento LAS - Cameron *et al* 1993) si ottennero i migliori risultati. La sensibilità raggiunta non permise di rivelare l'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto, ma fornì indicazioni su altre ricerche (Assione, effetto Cotton-Mouton), di cui si parlerà in seguito. Una coppia di magneti superconduttori forniva un campo magnetico di circa 3 tesla su una lunghezza di 8.8 metri. La corrente di alimentazione veniva modulata, intorno al suo valore medio, ad una frequenza il cui valore massimo non superò mai gli 80 mHz: tale scelta fu dettata da motivi tecnici. Una linea ottica di ritardo permetteva una amplificazione del cammino ottico pari a 34. Con un tempo di misura di circa  $2 \cdot 10^4$  sec il limite fissato per  $\Delta n_{vuoto}$  fu:

$$\Delta n_{vuoto} < 10^{-18} \quad \text{con } B^2 = 4 \times 10^8 \text{ gauss}^2 \quad (1.46)$$

ancora un fattore circa  $6 \times 10^4$  dall'effetto cercato.

Si noti come nell'esperimento PVLAS le migliorie avvengono in:

- uso del Fabry-Pérot di finezza 30000 equivalente ad una amplificazione di 20000 del cammino ottico
- campo magnetico quadro di circa 80 tesla<sup>2</sup>, ma della lunghezza di circa 1 metro
- modulazione a 2 Hz e quindi riduzione ulteriore del rumore a bassa frequenza
- nuovo tipo di laser ( $\lambda = 1064$  nm) con minor rumore

Nella tabella 1.2 vengono riassunte queste modifiche ed il parametro G fornisce l'atteso miglioramento globale del nuovo esperimento.

L'incremento globale è pari circa a 10000, l'ulteriore guadagno necessario per la misura lo si potrà ottenere aumentando il tempo di misura, che sarà possibile per un sistema stabile. Il fattore G=15 sulla voce frequenza di modulazione è una stima della possi-

parametro	Esp. LAS	Esp. PVLAS	G
$B_0^2$	4 T <sup>2</sup>	80 T <sup>2</sup>	20
lunghezza	8.8 m	0.9 m	0.1
amplificazione	34	20000	600
freq. modul.	50 mHz	2 Hz	15
$\lambda$ luce	512 nm	1064 nm	0.5

Tabella 1.2: Miglioramento della misura di  $\Delta n$  indotto da un campo magnetico esterno, G è il fattore di guadagno

bile riduzione del rumore a bassa frequenza. Si basa essenzialmente sull'esperienza fatta riguardo misure di sensibilità in funzione della frequenza e sulle migliori caratteristiche del nuovo laser. Nell'esperimento LAS si usò un laser ad argon, non stabilizzato, multimodo, e con rumore in ampiezza causato dalla scarica in gas. Nell'esperimento PVLAS il laser è del tipo Nd:YAG a stato solido, stabilizzato, monomodo ed avente una cavità monoblocco che riduce le fluttuazioni di intensità.

Riguardo alla voce amplificazione si ha che cavità che forniscono aumenti del cammino ottico di un fattore 20000 sono già state realizzate (Capitolo 4) e sono in fase di sviluppo Fabry-Pérot con finezze ancora più elevate.

### 1.3.2 Misure indirette

Il grafico di interazione fotone-fotone contribuisce, in generale, alle correzioni radiative di secondo ordine di qualunque processo elettromagnetico, tali correzioni danno di solito contributo molto piccolo all'intero processo studiato. I due esperimenti di cui mi occuperò sono il  $g_\mu - 2$  e il Delbruck scattering.

L'esperimento per la misura del momento magnetico anomalo del muone, definito da:

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} \quad (1.47)$$

ove  $g_\mu$  è il rapporto giromagnetico, rappresenta una delle verifiche più precise della elettrodinamica quantistica.

A livello attuale la miglior misura di  $a_\mu$  viene da un esperimento svoltosi al CERN (Bailey *et al* 1979)<sup>3</sup>, che fornì il risultato:

$$a_\mu^{exp} = (1\,165\,923 \pm 8.5) \times 10^{-9} \quad (1.48)$$

Il calcolo teorico fornisce invece il valore (Kinoshita 1992):

$$a_\mu^{th} = (1\,165\,919.2 \pm 1.8) \times 10^{-9} \quad (1.49)$$

<sup>3</sup>E' in fase di allestimento un esperimento a Brookhaven che prevede un miglioramento nella precisione di un fattore 20.

La concordanza di tali valori dimostra come tale esperimento rappresenta una pietra miliare per la QED. Il calcolo viene fatto assumendo il muone una particella senza struttura descritta da un campo di Dirac, ed esso deriva dalle correzioni radiative al processo semplice di figura 1.9.

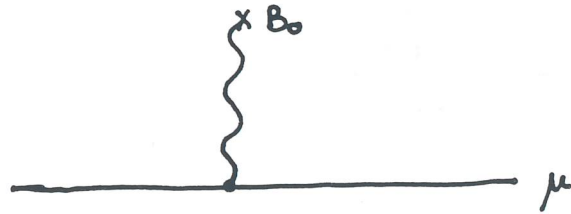


Figura 1.9: Interazione di un muone con il campo esterno

Nel calcolo di  $a_\mu$  vi è una parte dovuta al diagramma di Feynman di interazione fotone-fotone, la cui entità è:

$$a_\mu^{(\gamma-\gamma)} = (267.17 \pm 0.04) \times 10^{-9} \quad (1.50)$$

Ne consegue quindi, dati gli errori del calcolo e del risultato sperimentale, che tale esperimento verifica l'esattezza del grafico di interazione  $\gamma - \gamma$  ad un livello del 4 % circa, nonostante il fatto che il suo contributo sia dell'ordine di  $2.3 \times 10^{-4}$  volte l'intera anomalia. Questo test, però, deve essere considerato una verifica indiretta poichè è basato su una interpretazione del risultato sperimentale che richiede alcune ipotesi sulla interazione del muone. Nell'esperimento PVLAS quello che si va a cercare è direttamente una non linearità delle equazioni di Maxwell.

Lo scattering Delbruck è una correzione radiativa allo scattering Compton di un fotone su un nucleo. Assumendo il campo nucleare come un campo di Coulomb statico, al processo considerato contribuisce anche un termine di interazione fotone-fotone, descritto dal grafico di figura 1.10.

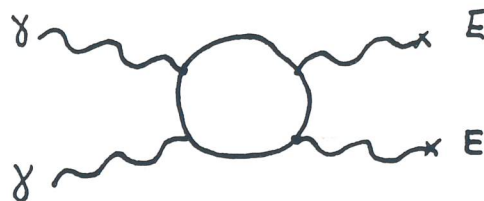


Figura 1.10: Diagramma di Feynman per lo scattering della luce da un potenziale elettrico

Nel calcolo della sezione d'urto differenziale compaiono altri termini, ed il processo dominante è lo scattering Thomson. Kahane *et al* (1977) misurarono l'andamento della sezione d'urto usando fasci  $\gamma$  di energia 9 MeV (cioè sopra la soglia di produzione di coppie)

su nuclei di  $^{181}\text{Ta}$  ( $Z=73$ ). In figura 1.11 sono riportati i loro risultati assieme alle previsioni teoriche con (linea continua) e senza (linea tratteggiata) il contributo derivante dal termine di interazione fotone-fotone. L'errore sulla verifica di quest'ultimo termine si può stimare intorno al 20%.

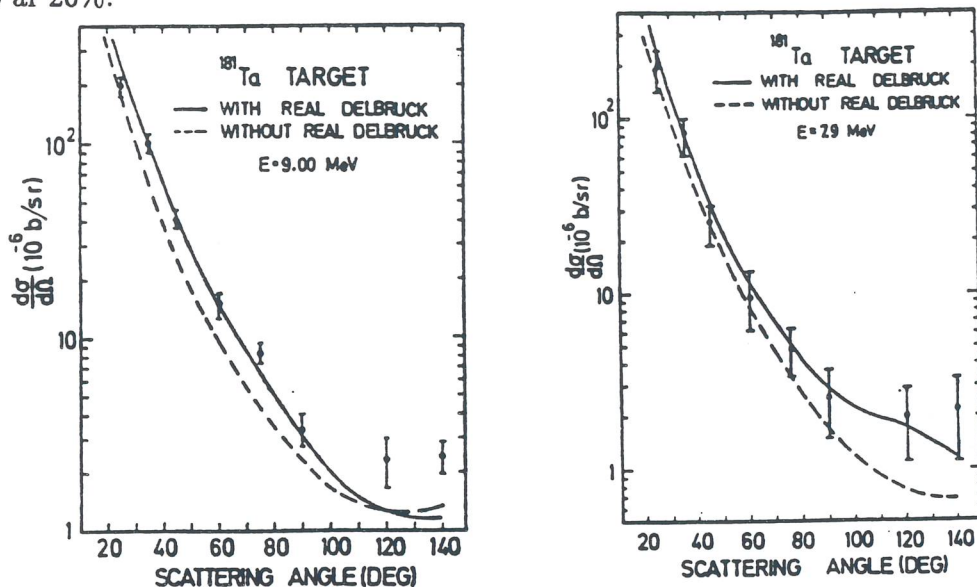


Figura 1.11: Risultati sperimentali concernenti lo scattering Delbruck su nuclei di tantalio

## 1.4 Altre proposte in corso

Esistono allo stato attuale una serie di proposte aperte per la verifica della non linearità delle equazioni di Maxwell. Vi accennerò brevemente per completezza. Un gruppo giapponese (Ni *et al* 1991) ha presentato un progetto in cui si vuole utilizzare un interferometro di Michelson con cavità Fabry-Pérot. Uno dei bracci attraversa una regione di campo magnetico e si prevede la possibilità di aggiungervi anche un campo elettrico per avere la tecnica da loro chiamata di 'Doppia modulazione'. Voglio qui notare che gli effetti non lineari indotti da campi elettrici non sono stati da me discussi, ma dalla forma della lagrangiana di Heisenberg-Euler si possono analogamente dedurre. I campi elettrici che si sanno produrre hanno effetti minori rispetto a quelli magnetici essenzialmente per la minor ampiezza dei campi che si riesce a realizzare.

Più recente la proposta di una collaborazione cino-americana (Ni *et al* 1994) in cui si pensa di utilizzare una sezione dismessa dell'acceleratore SSC (Superconducting Super Collider). In questo modo un braccio di un interferometro percorrerebbe una regione di campo magnetico della lunghezza di circa 155 metri avente un campo di 6.6 tesla.

Esiste una seconda proposta molto simile a quella appena citata (Lee *et al* 1994), che vuole sfruttare una diversa sezione dismessa dell'acceleratore SSC, con una lunghezza del campo intorno ai 70 metri.

## 1.5 Mescolamento del fotone con particelle di massa piccola

Una particella, se ha un vertice a due fotoni (figura 1.12a), può essere creata da un fotone attraversando una regione di campo magnetico esterno (effetto Primakoff, figura 1.12b).



Figura 1.12: (a) Particella con vertice a due fotoni e (b) effetto Primakoff.

In più, se tale particella è molto leggera o ha massa nulla si può ottenere una degenerazione con il fotone. Ci si attende in tal caso un fenomeno di mescolamento fra il fotone e la particella (Raffelt and Stodolsky 1987). Fra le particelle conosciute o proposte quella che maggiormente si può presentare come candidata per tali fenomeni è l'assione (Peccei and Quinn 1977a, 1977b). Tale particella fu introdotta per cercare di risolvere il cosiddetto 'Problema di CP forte' (Cheng 1988): la simmetria CP è violata dalla lagrangiana della cromodinamica quantistica ma a livello sperimentale tale violazione non è mai stata osservata nelle interazioni forti.

L'assione è una particella pseudoscalare a spin 0 che si accoppia a due fotoni mediante il grafico di figura 1.13, detto anomalia triangolare. Utilizzando la lagrangiana efficace (in unità naturali Heaviside-Lorentz usate per semplicità in questa sezione):

$$\mathcal{L}_p^{eff} = \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.51)$$

ove  $F_{\mu\nu}$  è il tensore e.m ( $\tilde{F}$  è il suo duale),  $a$  è il campo assionico, e  $g_{a\gamma\gamma}$  una costante (dimensionale) che caratterizza l'interazione, si può esprimere l'interazione assione-fotone con un grafico del tipo di figura 1.12a. Nei tipici modelli per l'assione che si considerano

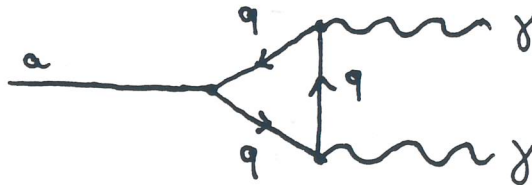


Figura 1.13: Anomalia triangolare

(Turner 1990), in cui tale particella viene incorporata nelle piú semplici teorie di grande unificazione, la costante di accoppiamento  $g_{a\gamma\gamma}$  risulta proporzionale alla massa  $m_a$  mediante la relazione:

$$g_{a\gamma\gamma} \sim \frac{m_a}{m_\pi} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{f_\pi} \quad (1.52)$$

ove  $m_\pi = 135$  MeV e  $f_\pi = 93$  MeV sono rispettivamente la massa e la costante di decadimento del pione neutro. Le varie ricerche sinora condotte per la rivelazione dell'assione hanno dato tutte risultato negativo, spiegabile essenzialmente con il debole accoppiamento previsto. La finestra di valori di massa  $m_a$  ancora ammissibili (Turner 1990) è la seguente:

$$10^{-6} \text{ eV} < m_a < 10^{-3} \text{ eV} \quad (1.53)$$

a cui corrispondono per l'accoppiamento  $g_{a\gamma\gamma}$  valori dell'ordine di  $10^{-13} \text{ GeV}^{-1}$ , ben al di sotto della scala debole.

### 1.5.1 Rivelazione dell'assione

L'esperimento PVLAS descritto in precedenza (sezione 1.2) permette di effettuare una ricerca di particelle che si accoppiano a due fotoni con un processo descritto dalla lagrangiana (1.51) (Maiani, Petronzio, Zavattini 1986). In tale esperimento un fascio laser di energia  $\omega$ , linearmente polarizzato, attraversa una regione di vuoto ove è presente un campo magnetico trasverso. Per un campo magnetico statico  $\mathbf{B}_0$  e fotoni reali, la (1.51) si può scrivere:

$$\mathcal{L}_p^{eff} = g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{B}_0 \quad (1.54)$$

ove  $\mathbf{E}_f$  è il campo elettrico del fotone. A causa di questa forma dell'interazione, la produzione di particelle, come dal grafico di fig 1.12b, avviene solamente per la componente del campo elettrico del fotone parallela al campo esterno. Se la massa della particella  $m_a$  è inferiore all'energia  $\omega$  le particelle prodotte sono reali e si ha una conseguente attenuazione della componente parallela di  $\mathbf{E}_f$  (dicroismo), mentre l'altra rimane inalterata. Il vettore  $\mathbf{E}_f$  manifesta quindi una rotazione  $\rho$  dopo aver attraversato il campo magnetico (figura 1.14).

Se l'assione prodotto interagisce con il campo esterno si può riconvertire di nuovo in un fotone reale, come descritto dal diagramma di figura 1.15.

In questo caso non vi è assorbimento, ma la componente parallela della luce oscilla in un assione massivo per parte del suo cammino, ed è così ritardata in fase rispetto alla componente ortogonale. Questo ritardo appare come una ellitticità del fascio uscente. Si noti come nel processo di figura 1.15 l'assione che vi compare non debba essere necessariamente reale.

Notiamo infine che la produzione di assioni sarà massima in caso di coerenza, cioè quando i campi dell'assione e del fotone rimangono in fase lungo la zona di campo magne-

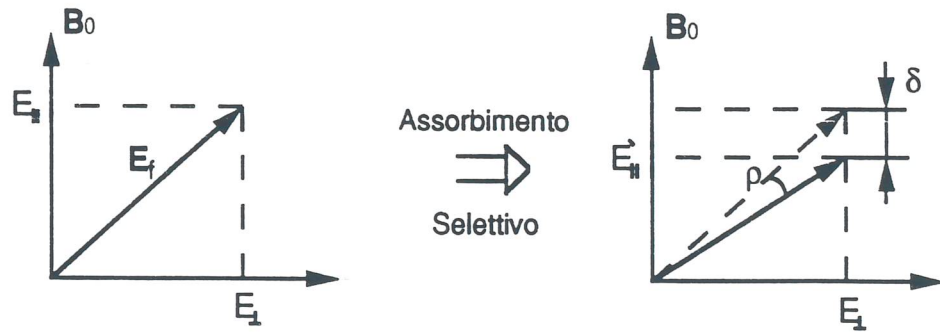


Figura 1.14: Rotazione dovuta ad assorbimento selettivo di una componente

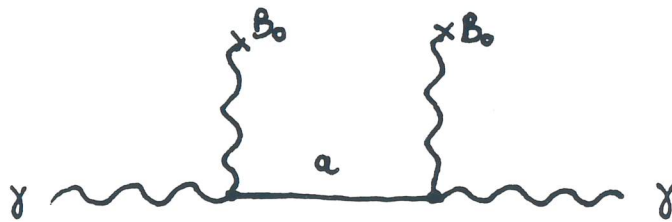


Figura 1.15: Produzione di assioni con riconversione

tico. Fissata la lunghezza  $l$  della zona di campo questo si traduce in un limite sui possibili valori di massa  $m_a$  che si possono ricercare, come verrà illustrato nel prossimo paragrafo.

### 1.5.2 L'assione e la propagazione del fotone

La lagrangiana di una particella pseudoscalare (indicata generalmente con "assione") in un campo elettromagnetico si scrive:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \frac{1}{2}(\partial_\mu a \partial^\mu a - m_a^2 a^2) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.55)$$

Le risultanti equazioni del moto, al primo ordine nel campo del fotone  $A$  ed in quello dell'assione  $a$  si scrivono:

$$\begin{aligned} (\square + m_a^2)a - g_{a\gamma\gamma} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \\ \square \mathbf{A} + g_{a\gamma\gamma} \dot{a} \mathbf{B}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

nella gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e scelta la direzione di propagazione ortogonale a  $\mathbf{B}_0$  (Campo esterno trasverso).

Una elegante soluzione di queste equazioni è stata data da Raffelt e Stodolsky (1987) nel

caso del vuoto<sup>4</sup>. Essi ricavarono il ritardo di fase  $\phi_a$  e l'attenuazione  $\delta_a$  della componente del campo del fotone parallela al campo magnetico esterno, per un percorso di lunghezza  $z$ :

$$\begin{aligned}\phi_a &= \theta_a^2 \left[ \frac{m_a^2 z}{2\omega} - \sin \left[ \frac{m_a^2 z}{2\omega} \right] \right] \\ \delta_a &= 2\theta_a^2 \sin^2 \left[ \frac{m_a^2 z}{4\omega} \right]\end{aligned}\tag{1.57}$$

ove  $\theta$  è l'angolo di mescolamento fra fotone e assione, definito da

$$\frac{1}{2} \tan 2\theta_a = g_{a\gamma\gamma} \frac{B_0 \omega}{m_a^2} \sim \theta_a\tag{1.58}$$

e l'approssimazione fatta vale in quanto il mescolamento è debole come si ricava sostituendovi i valori attesi.

I parametri fisici che si misurano sono una ellitticità  $\psi_a$  ed una rotazione  $\rho_a$  della polarizzazione del fascio luminoso. Per la loro determinazione si deve tener conto delle caratteristiche dell'apparato che si utilizza: campo magnetico rotante e cavità Fabry-Pérot. La dipendenza di  $\psi_a$  e  $\rho_a$  dall'angolo della polarizzazione va come  $\sin 2\varphi$ , con  $\varphi$  l'angolo fra il vettore campo elettrico del fotone ed il campo magnetico esterno. L'utilizzo del Fabry-Pérot consente di amplificare l'effetto da misurare, anche se qui non si può direttamente interpretare come un aumento del cammino ottico: gli specchi della cavità sono trasparenti per l'assione e quindi solo l'onda associata al fotone può essere riflessa. Per questo ogni riflessione agisce come un "filtro" per la componente assionica riportandola a zero. La fase e l'attenuazione in un singolo passaggio, di lunghezza  $l$ , scalano quindi linearmente con il parametro di amplificazione della cavità  $2\mathcal{F}/\pi$  (Appendice A). Scriviamo quindi le relazioni<sup>5</sup>:

$$\psi_a = g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 \omega^2}{\pi m_a^4} \left[ \frac{m_a^2 l}{2\omega} - \sin \left[ \frac{m_a^2 l}{2\omega} \right] \right] \sin 2\varphi \simeq g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 m_a^2 l^3}{48\pi\omega}\tag{1.59}$$

$$\rho_a = g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{2\mathcal{F} B_0^2 \omega^2}{\pi m_a^4} \sin^2 \left[ \frac{m_a^2 l}{4\omega} \right] \sin 2\varphi \simeq g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 l^2}{8\pi}\tag{1.60}$$

Le espressioni approssimate in tali equazioni seguono dallo sviluppo del seno e sono valide solo nel limite:

$$m_a^2 l / 4\omega \ll 1\tag{1.61}$$

<sup>4</sup>In presenza di gas a bassa pressione la soluzione è stata da me ricavata in un precedente lavoro (Ruoso 1991).

<sup>5</sup>Unità naturali Heaviside-Lorentz con  $1 \text{ T} = 195 \text{ eV}^2$ ,  $1 \text{ m} = 5 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$ .



questo coincide con la condizione di massima produzione di assioni reali e corrisponde alla condizione di coerenza:

$$m_a^2 < 2\pi\omega/l \quad (1.62)$$

che mantiene la fase relativa fra i campi sulla lunghezza del magnete. Nel caso della misura di ellitticità, la massima sensibilità si ottiene invece per:

$$m_a^2 = 2\pi\omega/l. \quad (1.63)$$

Data la lunghezza  $l = 0.9$  m del magnete ciò significa per le masse valori:

$$m_a \lesssim 10^{-3} \text{ eV}. \quad (1.64)$$

### 1.5.3 La ricerca dell'assione nell'esperimento PVLAS

Nell'esperimento PVLAS è possibile effettuare misure separate dei due parametri  $\psi_a$  e  $\rho_a$  definiti dalle (1.59) e (1.60).

Le misure di due parametri distinti permette di avere informazioni su  $g_{a\gamma\gamma}$  ed  $m_a$  indipendentemente dal modello scelto per la particella. Un segnale positivo fornirà quindi direttamente massa e costante di accoppiamento della particella, mentre la mancata rivelazione escluderà una zona del piano  $(g_{a\gamma\gamma}, m_a)$ . In figura 1.16 sono mostrati i limiti fissati dall'esperimento LAS (Cameron *et al* 1993), di cui si è parlato nella sezione precedente ed al quale ho partecipato nel primo anno di dottorato.

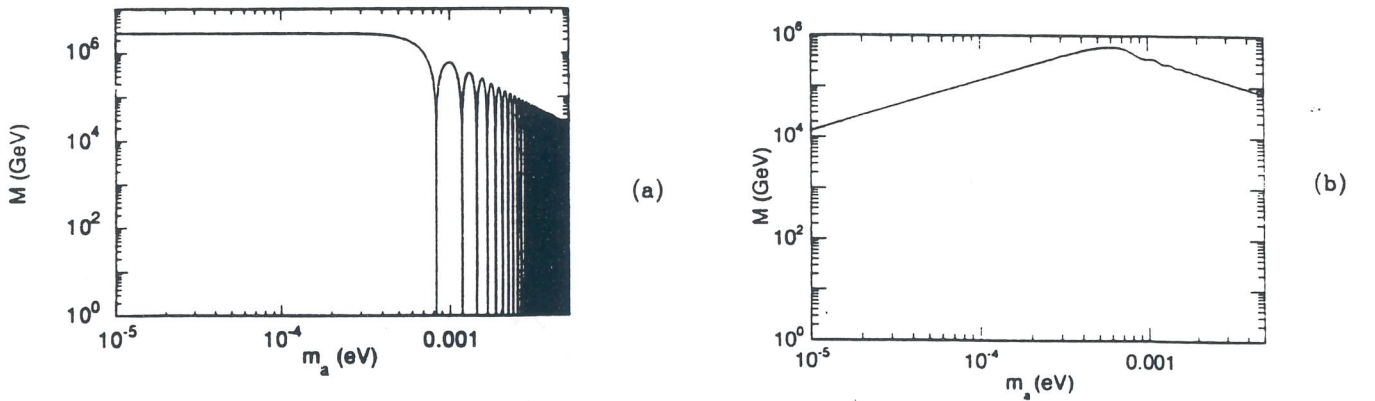


Figura 1.16: Limiti superiori per l'inverso dell'accoppiamento assione-fotoni ( $g_{a\gamma\gamma} = 1/M$ ) dall'esperimento LAS. (a) Limiti dalla misura di rotazione. (b) Limiti dalla misura di ellitticità.

Notiamo che il segnale relativo a particelle a massa piccola è perfettamente distinguibile da quello della birifrangenza magnetica del vuoto in quanto quest'ultimo fenomeno non contribuisce alla rotazione.

### 1.5.4 Particelle scalari

La lagrangiana (1.51) descrive il grafico di figura (1.12) nel caso di particelle pseudoscalari, e si deve modificare in:

$$\mathcal{L}_s^{eff} = g_{s\gamma\gamma}\phi_s F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.65)$$

qualora si abbia una particella scalare descritta dal campo  $\phi_s$ . In tal caso gli effetti che si manifestano sono del tutto simili a quelli previsti per l'assione, con la differenza che ora la componente della polarizzazione interessata è quella ortogonale al campo magnetico esterno. Detto  $\varphi_s$  l'angolo fra il campo magnetico del fotone ed il campo esterno, rispetto all'angolo  $\varphi$  che compare nelle (1.59 - 1.60) vi è una differenza di  $\pi/2$ . Si ha quindi:

$$\sin 2\varphi_s = -\sin 2\varphi \quad (1.66)$$

e gli effetti sono semplicemente cambiati di segno rispetto a quelli calcolati per il caso pseudoscalare.

## 1.6 Fenomeni meno rilevanti

In un apparato sperimentale come quello descritto in questo capitolo possono aver luogo anche altri tipi di fenomeni. Il processo chiamato 'photon splitting', cioè la conversione di un fotone in una coppia di fotoni, può avvenire in presenza di un campo esterno (Adler 1971). Tale processo è però omogeneo per i diversi stati di polarizzazione e quindi non sarebbe visibile con l'apparato proposto. I campi magnetici che si riescono a fare danno luogo comunque ad uno splitting molto al di sotto della sensibilità realizzabile per la verifica di tale processo in un laboratorio terrestre.

L'utilizzo di cavità a finezze sempre più elevate può invece avere come conseguenza che il campo magnetico associato al fotone non sia più trascurabile rispetto al campo esterno. In questo caso la soluzione data nel paragrafo 1.1.3 non è corretta e si deve risolvere un sistema di equazioni più complesso.

Ulteriori correzioni alla soluzione proposta in questa tesi sono in fase di studio (Bakalov 1994a), e riguardano ad esempio la presenza di gradienti nel campo esterno o la non uniformità del fascio luminoso, che proviene da un laser ed ha quindi profilo gaussiano (Si veda anche Ding e Kaplan 1991). Una prima stima ha comunque messo in evidenza che eventuali altri fenomeni sono molto al di sotto della sensibilità prevista per l'apparato di misura.

## Capitolo 2

# Metodo di misura: la tecnica eterodina ed il Fabry-Pérot

### 2.1 Funzione di trasferimento di un Fabry-Pérot in presenza di birifrangenze

Si consideri un risonatore Fabry-Pérot ed un'onda elettromagnetica di ampiezza  $E_a$  incidente su uno degli specchi, ad esempio lo specchio 1 (figura 2.1).

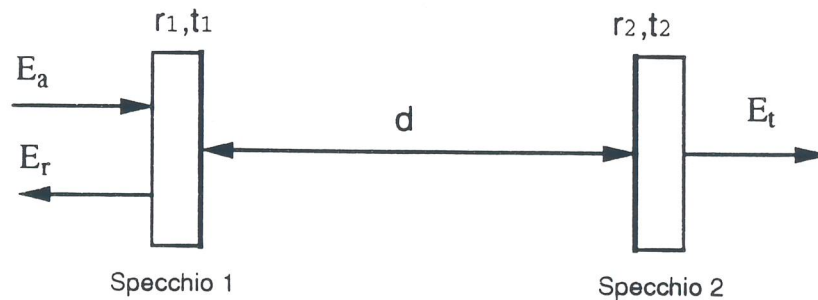


Figura 2.1: Schema del Fabry-Pérot con i campi incidente  $E_a$ , riflesso  $E_r$  e trasmesso  $E_t$

Gli specchi sono caratterizzati dai loro coefficienti di riflessione  $r_i$  e trasmissione  $t_i$ , tali che:

$$r_i^2 + t_i^2 = \mathcal{R}_i + \mathcal{T}_i = 1 - p_i = \sigma_i \quad (2.1)$$

ove  $p_i$  sono le perdite. Scriviamo, seguendo l'appendice A, la relazione che definisce la funzione di trasferimento in trasmissione  $H^t(\delta)$  del risonatore, definita da:

$$H^t(\delta) = \left( \frac{E_t}{E_a} \right) = \frac{t_1 t_2}{e^{-i\frac{\delta}{2}} - r_1 r_2 e^{i\frac{\delta}{2}}} \quad (2.2)$$

$E_t$  è l'ampiezza del campo trasmesso,  $\delta$  è il ritardo di fase sul percorso fra i due specchi (andata e ritorno):

$$\delta = 4\pi n \frac{d}{\lambda} \quad (2.3)$$

$n$  è l'indice di rifrazione.

Sia  $\delta_0$  lo sfasamento in risonanza, vale quindi:

$$e^{\pm i\delta_0} = 1 \quad \delta_0 = 2\pi k \quad k = \text{intero} \quad (2.4)$$

Fissata tale condizione possiamo calcolare il comportamento della funzione di trasferimento in presenza di birifrangenze infinitesime in un tratto del mezzo fra gli specchi.

Individuiamo due assi ortogonali per i quali si scrive:

$$\begin{aligned} n_{\parallel} &= n_0 + \frac{\Delta n}{2} \\ n_{\perp} &= n_0 - \frac{\Delta n}{2} \\ \Delta n &= n_{\parallel} - n_{\perp} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Piccole variazioni dell'indice di rifrazione implicano scostamenti dello sfasamento  $\delta$  dal valore di risonanza  $\delta_0$ , si considera quindi lo sviluppo in serie:

$$H^t(\delta) = H^t(\delta_0) + (\delta - \delta_0) H'^t(\delta_0) \quad (2.6)$$

e si calcolano le funzioni di trasferimento per i due assi considerati:

$$H_{\perp}^t(\delta) = H^t(\delta_0) - 2\beta H'^t(\delta_0) \quad (2.7)$$

$$H_{\parallel}^t(\delta) = H^t(\delta_0) + 2\beta H'^t(\delta_0)$$

$$2\beta = \delta(n_{\parallel}) - \delta(n_0) = 2\pi \frac{L}{\lambda} \Delta n \quad (2.8)$$

La distanza  $L$  che compare indica la lunghezza del mezzo birifrangente. Notiamo che la (2.8) ci dice che  $\beta$  è esattamente la ellitticità massima (vedi (1.25)) acquisita da un fascio luminoso in un passaggio singolo nel mezzo birifrangente.

Per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto, discussa nel capitolo 1, le due direzioni sono quelle parallela ed ortogonale al campo magnetico esterno  $\mathbf{B}_0$ . Dalla relazione per  $\Delta n$  di tabella 1.1 segue:

$$\beta = 3\pi \frac{L}{\lambda} AB_0^2 \sim 10^{-15} \quad (2.9)$$

il che giustifica ampiamente le approssimazioni fatte.

Sostituendo nelle (2.7) la (2.2) si ricava:

$$H_{\perp}^t(\delta) = h_1 - 2i\beta h_2 \quad (2.10)$$

$$H_{\parallel}^t(\delta) = h_1 + 2i\beta h_2 \quad (2.11)$$

$$h_1 = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \quad h_2 = \frac{t_1 t_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (2.12)$$

## 2.2 Misura con la tecnica eterodina

### 2.2.1 Matrici di Jones per gli elementi ottici

Nella sezione 1.2 si è illustrato lo schema generale della misura della birifrangenza del vuoto effettuata mediante la tecnica eterodina. Se ne illustrano ora le caratteristiche in dettaglio.

Per la misura di piccole ellitticità si utilizza un apparato come quello dello schema di figura 2.2.

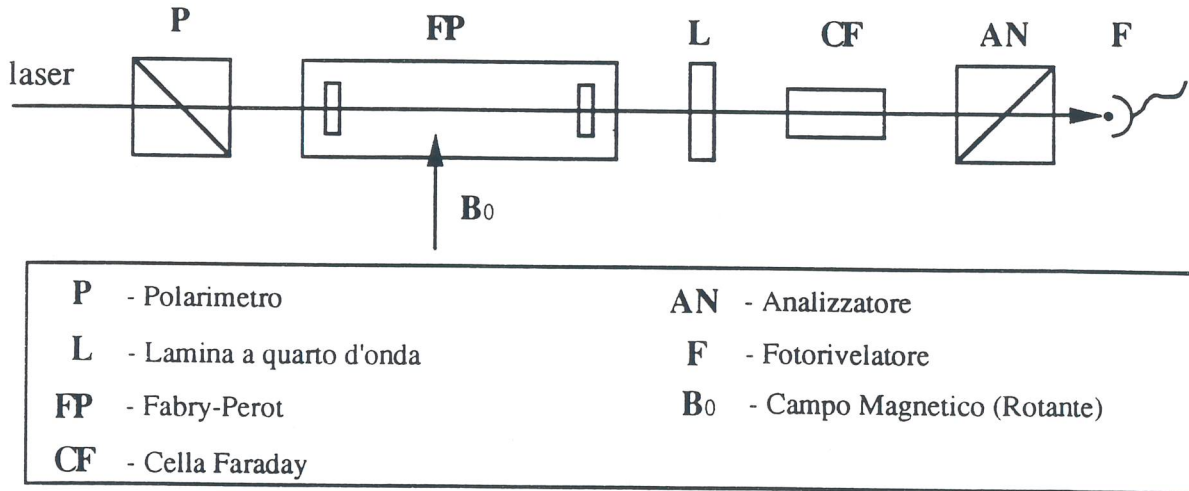


Figura 2.2: Schema per la misura di piccole birifrangenze.

In tale schema un fascio linearmente polarizzato tramite **P** acquisisce una ellitticità  $\psi$  nell'attraversare una regione di campo magnetico in vuoto. Una lamina a quarto d'onda, opportunamente orientata, trasforma l'ellitticità  $\psi$  del fascio in rotazione di pari ampiezza, che successivamente si mescola con la rotazione nota  $\eta$  introdotta da una cella di Faraday **CF**. Il segnale al fodiiodo **F** è l'intensità luminosa associata alla componente selezionata dal polarizzatore **AN**, incrociato con quello d'ingresso **P**.

Per descrivere l'apparato si utilizza il formalismo delle matrici di Jones (Azzam e Bashara 1987). In tale rappresentazione, scegliendo come asse  $x$  la direzione di polarizzazione determinata da  $\mathbf{P}$ , si può scrivere il vettore campo elettrico della luce all'uscita del primo polarimetro:

$$\mathbf{E}_f(t) = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Le matrici per l'analizzatore e la lamina a quarto d'onda (ruotata di  $\alpha_L$  rispetto alla polarizzazione iniziale):

$$\mathbf{AN} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_L + i \cos^2 \alpha_L & (i-1) \sin \alpha_L \cos \alpha_L \\ (i-1) \sin \alpha_L \cos \alpha_L & i \sin^2 \alpha_L + \cos^2 \alpha_L \end{bmatrix}$$

ove  $\sigma^2$  è l'estinzione (in genere dell'ordine di  $10^{-7}$  per dei buoni polarizzatori come i Glan Thompson).

La cella di Faraday effettua semplicemente una rotazione della polarizzazione di un angolo  $\eta \ll 1$ , modulato nel tempo:

$$\mathbf{CF} = \begin{bmatrix} 1 & \eta(t) \\ -\eta(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\eta(t) = \eta_0 \cos \omega_f t \quad (2.15)$$

Ampiezze tipiche per  $\eta_0$  sono dell'ordine di  $10^{-3}$  radianti, con  $\omega_f/2\pi$  dell'ordine di  $10^2$  Hz.

Per ricavare la matrice associata al Fabry-Pérot si deve tener conto che l'effetto di birifrangenza è dovuto al campo esterno rotante. Fissato in  $\varphi(t)$  l'angolo fra la polarizzazione della luce e  $\mathbf{B}_0$  scriveremo:

$$\begin{aligned} \mathbf{FP} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\parallel}^t(\delta) & 0 \\ 0 & H_{\perp}^t(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{\perp}^t(\delta) \sin^2 \varphi(t) + H_{\parallel}^t(\delta) \cos^2 \varphi(t) & \frac{1}{2}(H_{\parallel}^t(\delta) - H_{\perp}^t(\delta)) \sin 2\varphi(t) \\ \frac{1}{2}(H_{\parallel}^t(\delta) - H_{\perp}^t(\delta)) \sin 2\varphi(t) & H_{\parallel}^t(\delta) \sin^2 \varphi(t) + H_{\perp}^t(\delta) \cos^2 \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 + 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) & 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) \\ 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) & h_1 - 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\varphi(t) = \omega_m t + \phi_m \quad (2.17)$$

con  $\omega_m/2\pi = 1$  Hz come enunciato al paragrafo 1.2.3.

Si deve inoltre introdurre una ulteriore matrice  $\mathbf{S}$  che tenga conto di eventuali errori di allineamento degli elementi ottici. Per esempio, a causa di rilassamenti meccanici o

di variazioni di temperatura, gli angoli fra gli assi dei polarizzatori possono variare lentamente nel tempo spostandosi dalle condizioni ottimali di misura. Chiamiamo  $\theta$ , l'angolo di misallineamento (che possiamo pensare costante in questa analisi) e scriviamo la matrice:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_s \\ -\theta_s & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Tale matrice commuta con  $\mathbf{AN}$  e  $\mathbf{CF}$  ma non con le altre. Poichè però si può pensare quale elemento fisso il primo polarizzatore, la considereremo posta giusto prima della cella di Faraday. Sperimentalmente si riesce a mantenere  $\theta_s$  inferiore a  $10^{-5}$  rad.

## 2.2.2 Rivelazione del segnale

La quantità fisica da misurare è l'ellitticità  $\psi$  introdotta dal vuoto reso birifrangente tramite il campo magnetico esterno. All'uscita del Fabry-Pérot possiamo rappresentare la luce mediante:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = E_0 e^{i\omega t} \mathbf{FP} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} h_1 + 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) \\ 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

L'ellitticità è il rapporto fra le ampiezze delle due componenti (minore su maggiore) e si scrive:

$$\begin{aligned} \psi &\simeq \frac{|E_y|}{|E_x|} \simeq 2\beta \frac{h_2}{h_1} \sin 2\varphi(t) = \psi_0 \sin 2\varphi(t) \\ \psi_0 &= 2\beta \frac{h_2}{h_1} \simeq 2\beta \frac{\mathcal{F}}{\pi} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ove si è tenuto conto della definizione di finezza  $\mathcal{F}$  data in precedenza (paragrafo 1.2.2). Ricordando che  $\beta$  è l'ellitticità per un passaggio nel mezzo birifrangente, come visto dalla (2.8), la (2.20) ci dice che l'effetto del Fabry-Pérot è di amplificare per il fattore  $2\mathcal{F}/\pi$ .

Vediamo quindi quali sono i segnali attesi. Seguendo la figura 2.2 l'intensità  $I_{ph}$  della luce che incide sul fotodiode è:

$$I_{ph} = I_0 |\mathbf{m}_t|^2 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{AN} \times \mathbf{CF} \times \mathbf{S} \times \mathbf{L} \times \mathbf{FP} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ove  $I_0 \propto E_0^2$  è l'intensità della luce che esce dal polarizzatore  $\mathbf{P}$ , e  $\mathbf{m}_t$  assume la forma:

$$\mathbf{m}_t = \begin{pmatrix} m_\sigma \\ m_t \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Sostituendovi le matrici di Jones per ogni elemento, scegliendo  $\alpha_L = 0$  e trascurando per  $m_t$  i termini  $\eta\theta_s\beta$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} m_t &= 2\eta(t)\beta h_1 \cos 2\varphi(t) + 2\theta_s\beta h_1 \cos 2\varphi(t) + \\ &+ i[-\eta(t)h_1 - \theta_s h_1 + 2\beta h_2 \sin 2\varphi(t)] \\ m_\sigma &\simeq i\sigma h_1 \end{aligned}$$

Trascurando ora i termini contenenti i fattori  $\theta_s\beta$ ,  $\theta_s^2$ ,  $\beta^2$ , l'intensità della luce sul fotodiodo si scrive:

$$\begin{aligned} I_{ph}(t) &\simeq I_0 \left[ \sigma^2 h_1^2 + \eta^2(t) h_1^2 + 2\eta(t)\theta_s h_1^2 - 4\eta(t)\beta h_1 h_2 \sin 2\varphi(t) \right] = \\ &= I_0 \left[ \sigma^2 h_1^2 + \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2 + \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2 \cos 2\omega_f t + \\ &\quad + 2h_1^2 \theta_s \eta_0 \cos \omega_f t + \\ &\quad + 2\eta_0 \beta h_1 h_2 \cos \left[ (\omega_f + 2\omega_m)t + 2\phi_m + \frac{\pi}{2} \right] + \\ &\quad \left. + 2\eta_0 \beta h_1 h_2 \cos \left[ (\omega_f - 2\omega_m)t - 2\phi_m - \frac{\pi}{2} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

ove si sono esplicitate le dipendenze temporali come date nel paragrafo precedente. Il segnale  $I_{ph}(t)$  viene successivamente analizzato armonicamente mediante un analizzatore di spettro, che esegue la trasformata di Fourier. In tabella 2.1 sono esplicitate le componenti armoniche principali (in unità di intensità  $I_0$ )

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza	fase
$I_{dc}$	0	$ \sigma^2 h_1^2 + \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2 $	
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$2\beta h_1 h_2 \eta_0$	$\phi_- = -2\phi_m - \frac{\pi}{2}$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0 \theta_s h_1^2$	
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$2\beta h_1 h_2 \eta_0$	$\phi_+ = 2\phi_m + \frac{\pi}{2}$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2$	

Tabella 2.1: Componenti del segnale trasmesso, l'ampiezza è in unità  $I_0$ .

Utilizzando tali componenti armoniche si ricava il rapporto:

$$\frac{I_- + I_+}{I_{2f}} = 8 \frac{\beta h_2}{\eta_0^2 h_1} = 4 \frac{\psi_0}{\eta_0} \quad (2.25)$$



ove si è utilizzata la definizione di  $\psi_0$  della (2.20). Invertendo l'ultima relazione scritta segue:

$$\psi_0 = \eta_0 \frac{I_- + I_+}{4I_{2f}} \quad (2.26)$$

Al secondo membro compaiono tutte quantità note e quindi si può ricavare la grandezza  $\psi_0$ , direttamente legata all'effetto di birifrangenza del vuoto da (si veda (2.9)):

$$\psi_0 = 6\mathcal{F}AB_0^2 \frac{L}{\lambda} \quad (2.27)$$

Un tipico spettro che mostra l'andamento di  $I_{ph}$  in funzione della frequenza è mostrato in figura 2.3.

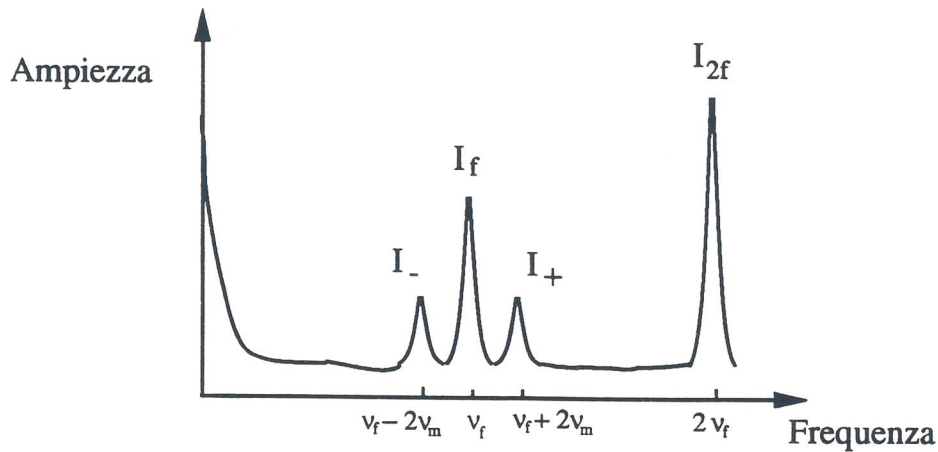


Figura 2.3: Tipico spettro di  $I_{ph}$ .

A causa dei piccoli valori ottenibili per  $\omega_m$  il segnale relativo a  $\psi$  appare come due picchi satelliti rispetto ad una portante alla frequenza di modulazione della cella Faraday. Il tutto sopra un fondo che è il rumore connesso alla misura, di cui si discuterà in seguito.

### 2.2.3 rivelazione in riflessione

Lo schema di figura 2.2 utilizza il Fabry-Pérot nel modo 'trasmissione'. E' possibile però utilizzare la cavità in riflessione, adottando uno schema come quello di figura 2.4.

Le tecniche sono sostanzialmente equivalenti. Il modo in trasmissione è più "pulito": come si vedrà in seguito per agganciare la frequenza del laser alla risonanza del Fabry-Pérot bisogna modulare il fascio ad alta frequenza e tali componenti di modulazione si ritrovano solo sul segnale riflesso.

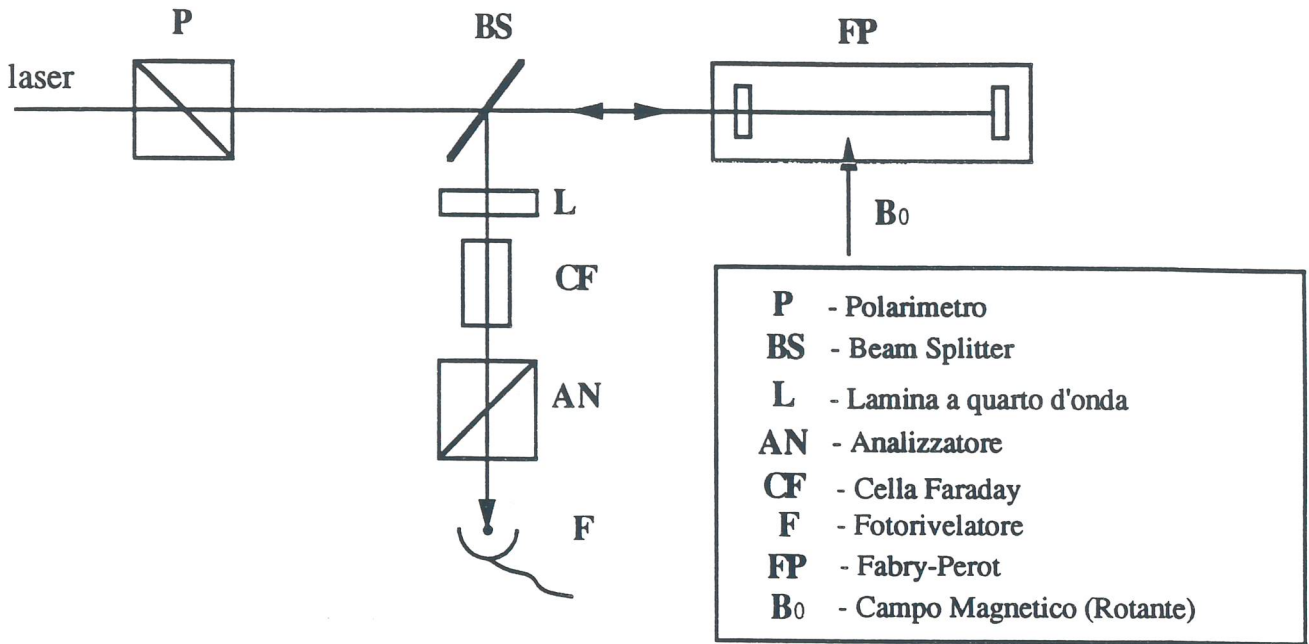


Figura 2.4: Schema per la rivelazione in riflessione.

## 2.3 Rapporto segnale rumore e tempo di misura

Come discusso in precedenza l'informazione cercata è l'ampiezza dell'intensità al fotodiode in corrispondenza delle frequenze  $\omega_f \pm 2\omega_m$ . A causa del valore dell'ellitticità  $\psi_0$  tali ampiezze risultano molto piccole rispetto al segnale che si ha in continua.

La componente continua genera un rumore shot a cui corrisponde una corrente  $i_{shot}$  di ampiezza spettrale:

$$i_{shot} = \sqrt{2ei_{dc}\Delta f} \quad (2.28)$$

ove  $\Delta f$  è la banda di misura, e  $i_{dc}$  è la corrente continua uscente dal fotodiode, legata alla intensità  $I_{dc}$  della luce sul fotodiode dalla efficienza quantica  $q$ :

$$i_{dc} = \frac{eI_{dc}q}{h\nu} \quad (2.29)$$

Poniamoci quindi nella condizione in cui il solo rumore presente sia quello shot, e andiamo a discutere la visibilità dei picchi associati al segnale.

Definiamo per la cavità il coefficiente efficienza  $\eta_{FP} = h_1^2$  che esprime il rapporto fra la potenza trasmessa e quella incidente. Valori tipici per  $\eta_{FP}$  sono fra il 10 % ed il 30%. Riscriviamo la tabella 2.1 esplicitando la ellitticità  $\psi_0$  che si misura, scrivendo le ampiezze in unità  $\eta_{FP}I_0$ .

Con i dati della nuova tabella 2.2 calcoliamo la corrente  $i_{shot}$  del rumore shot:

$$i_{shot} = \sqrt{2e^2 \left( \sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2 \right) \frac{\eta_{FP}I_0q}{h\nu} \Delta f} \quad (2.30)$$

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza
$I_{dc}$	0	$ \sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2 $
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$\psi_0\eta_0$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0\theta_s$
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$\psi_0\eta_0$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2}\eta_0^2$

Tabella 2.2: Componenti del segnale trasmesso, ampiezze in unità  $\eta_{FP}I_0$

e quella  $i_s$ , associata ad uno dei picchi del segnale:

$$i_s = eI_+ \frac{q}{h\nu} = e\psi_0\eta_0\eta_{FP} \frac{q}{h\nu} I_0 \quad (2.31)$$

Se si tiene conto che abbiamo due picchi il segnale raddoppia rispetto alla (2.31) e il rumore cresce di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto alla (2.30). Si ottiene quindi il rapporto segnale rumore SNR in caso di solo rumore shot (si considera ora il valore di picco anzichè quello rms dato dalla (2.28)):

$$\text{SNR} = \frac{i_s}{i_{shot}} = \frac{\psi_0\eta_0}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2}} \sqrt{\frac{\eta_{FP}I_0q}{2h\nu}} \sqrt{T} \quad (2.32)$$

ove  $T$  è il tempo di misura. Supporremo ora di effettuare una modulazione alla cella di Faraday tale che  $\frac{1}{2}\eta_0^2 \gg \sigma^2$ . In questo caso la (2.32) assume la forma semplice:

$$\text{SNR} = \psi_0 \sqrt{\frac{I_0\eta_{FP}q}{h\nu}} \sqrt{T} \quad (2.33)$$

La sensibilità è definita come l'ellitticità che si misura in un secondo tale che  $\text{SNR}=1$ . Sostituendo tali valori nella relazione appena trovata si ricava la sensibilità  $\psi_{sh}$  corrispondente al rumore shot:

$$\psi_{sh} = \sqrt{\frac{hc}{I_0\eta_{FP}q\lambda}} \quad (2.34)$$

Proviamo a sostituire dei valori tipici per un apparato sperimentale<sup>1</sup>:

$$I_0 = 50 \text{ mW} \simeq 5 \times 10^5 \text{ erg/sec}$$

$$q \simeq 0.9$$

$$\lambda = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\eta_{FP} = 0.2$$

<sup>1</sup>si ricorda  $hc \simeq 2 \cdot 10^{-25} \text{ J m} \simeq 2 \cdot 10^{-16} \text{ erg cm}$ .

si ottiene:

$$\psi_{sh} \simeq 4.7 \times 10^{-9} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.35)$$

Ricordiamo che l'ellitticità dovuta alla birifrangenza del vuoto è (si veda equazione (1.36)):

$$\psi_0 = 2\beta \frac{\mathcal{F}}{\pi} = 6 \frac{L\mathcal{F}}{\lambda} AB_0^2 \simeq 2.02 \times 10^{-11} \text{ rad} \quad (2.36)$$

Il che significa che con questi parametri si ottiene SNR=1 per la misura dell'effetto di elettrodinamica quantistica con un tempo di integrazione:

$$T \simeq 5.4 \times 10^4 \text{ sec} \simeq 15 \text{ ore} \quad (2.37)$$

In realtà nella realizzazione dell'esperimento si verifica la presenza di altri rumori, il cui contributo verrà analizzato in seguito (capitolo 5).

## 2.4 Misura di dicroismi per la rivelazione dell'assione

Per la rivelazione di particelle quali l'assione (vedi sezione 1.5) si rende necessaria la misura di rotazioni. Lo schema dell'apparato in questo caso differisce da quello di figura 2.2 soltanto per il fatto che si deve togliere la lamina a quarto d'onda. In questo modo una eventuale rotazione prodotta in cavità può direttamente interferire con la rotazione nota  $\eta(t)$  della cella di Faraday, e si ottengono così segnali simili a quelli visti per la misura di ellitticità.

Possiamo scrivere la matrice di Jones per il Fabry-Pérot in presenza di assorbimento selettivo  $\delta_a$  (Si veda eq. 1.59) della componente del campo elettrico del fotone parallela al campo magnetico esterno (Asse x), chiamando ancora con  $\varphi(t)$  l'angolo di rotazione del magnete <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{FP} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} H^t(\delta_0) \begin{bmatrix} 1 - \delta_a \frac{2\mathcal{F}}{\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= h_1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \cos^2 \varphi(t) & -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \\ -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) & 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin^2 \varphi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ove  $\varphi(t) = \omega_m t + \phi_m$  e  $h_1 = H^t(\delta_0)$  come visto in 2.1.1.

La luce, polarizzata linearmente in ingresso, all'uscita della cavità si scrive:

<sup>2</sup>Si veda l'appendice A.3 per il calcolo esplicito della 2.38

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = h_1 E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \cos^2 \varphi(t) \\ -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

che è luce linearmente polarizzata e ruotata rispetto alla direzione iniziale di un angolo  $\rho(t)$ :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \\ &= -\rho_0 \sin 2\varphi(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\rho_0 = \frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \quad (2.41)$$

Usando anche in questo caso le matrici di Jones per i vari elementi ottici si ricava, fissata con  $I_0$  l'intensità della luce dopo il polarizzatore  $\mathbf{P}$ , l'intensità  $I_{ph}(t)$  al fotodiode:

$$\begin{aligned} I_{ph}(t) &\simeq \eta_{FP} I_0 \left[ \sigma^2 + \eta^2(t) + 2\theta_s \eta(t) + 2\rho_0 \eta(t) \sin 2\varphi(t) - 4\rho_0 \eta^2(t) \cos^2 \varphi(t) \right] \simeq \\ &\simeq \eta_{FP} I_0 \left[ \sigma^2 + \frac{1}{2} \eta_0^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_0^2 \cos 2\omega_f t + \\ &\quad + 2\theta_s \eta_0 \cos \omega_f t + \\ &\quad + \eta_0 \rho_0 \cos \left[ (\omega_f + 2\omega_m)t + 2\phi_m + \frac{\pi}{2} \right] + \\ &\quad \left. + \eta_0 \rho_0 \cos \left[ (\omega_f - 2\omega_m)t - 2\phi_m - \frac{\pi}{2} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Le cui componenti armoniche (In unità  $\eta_{FP} I_0$ ) sono date in tabella 2.3.

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza	fase
$I_{dc}$	0	$\sigma^2 + \frac{1}{2} \eta_0^2$	
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$\rho_0 \eta_0$	$\phi_- = -2\phi_m - \frac{\pi}{2}$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0 \theta$	$\phi_f$
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$\rho_0 \eta_0$	$\phi_+ = 2\phi_m + \frac{\pi}{2}$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2} \eta_0^2$	

Tabella 2.3: Componenti del segnale trasmesso per rivelazioni di rotazioni, ampiezze in unità  $\eta_{FP} I_0$

Anche in questo caso si ricava la rotazione  $\rho_0$ , direttamente legata alla attenuazione  $\delta_a$ , da:

$$\rho_0 = \frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} = \eta_0 \frac{I_- + I_+}{4I_{2f}} \quad (2.43)$$

La misura di una rotazione non presenta quindi differenze sostanziali da una misura di ellitticità.

## 2.5 Calibrazione dell'apparato: effetto Cotton-Mouton

Una sostanza in presenza di un campo magnetico esterno diventa birifrangente con un fenomeno noto come effetto Cotton-Mouton (Landsberg 1979). Supponendo di avere un fascio luminoso che attraversa il mezzo si può definire la costante di Cotton-Mouton  $C_{CM}$  mediante la relazione :

$$\Delta n_{CM} = n_{\parallel} - n_{\perp} = C_{CM} \lambda B^2 \quad (2.44)$$

ove  $n_{\parallel}$  e  $n_{\perp}$  sono gli indici di rifrazione per la luce polarizzata rispettivamente parallela e perpendicolare al campo magnetico.  $B$  è la componente del campo esterno ortogonale alla direzione di propagazione della luce di lunghezza d'onda  $\lambda$ . In tabella 2.4 sono riportati i valori di  $C_{CM}$  per alcuni gas a pressione normale.

gas	$C_{CM}$ (gauss <sup>-2</sup> cm <sup>-1</sup> )	condizioni	riferimento
H <sub>2</sub>	$(1.61 \pm 0.11) \times 10^{-18}$	273° K, $\lambda = 514$ nm	Scuri <i>et al</i> 1986
He	$(3.5 \pm 0.7) \times 10^{-20}$	273° K, $\lambda = 514$ nm	Cameron <i>et al</i> 1991
N <sub>2</sub>	$-5.1 \times 10^{-17}$	298° K, $\lambda = 514$ nm	Carusotto <i>et al</i> 1984
O <sub>2</sub>	$-(4.89 \pm 0.11) \times 10^{-16}$	290° K, $\lambda = 514$ nm	Carusotto <i>et al</i> 1982

Tabella 2.4: Costanti di Cotton-Mouton per alcuni gas a pressione normale

Seguendo lo schema sperimentale proposto in figura 2.2 supponiamo di avere all'interno del Fabry-Pérot un gas alla pressione  $P_{gas}$  (espressa in mbar). Ne segue che dopo la cavità la polarizzazione del fascio luminoso avrà una ellitticità:

$$\psi_0^{CM} = 2 \frac{\mathcal{F}L}{\lambda} \Delta n_{CM} \frac{P_{gas}}{1013} = 2 \mathcal{F}L C_{CM} B_0^2 \frac{P_{gas}}{1013} \quad (2.45)$$

Se si pone all'interno della cavità 1 mbar di azoto, seguendo tabella 2.4 l'ellitticità prevista è (si suppone  $C_{CM}$  indipendente da  $\lambda$ ):

$$\psi_0^{CM}(N_2, 1 \text{ mbar}) \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (2.46)$$