Vedere l'invisibile: leggere gli spettri gamma al liceo (INFN LNL 2024)

Simone Napolitano[1], Alessandra Fudoli [2] , Matteo Morresi [3], Palma D'Antonio[4], Erika Aliotta[5] , Andrea Dalla Guarda[6]

[1] Docente di matematica e fisica presso il Liceo Artistico "Giulio Romano" - Mantova

[2] Docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Statale " Leonardo Da Vinci" – Milano

[3] Docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico "Galileo Galilei" – Macerata

[4] Docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico "Alessandro Volta" – Foggia

[5] Docente di fisica presso l'Istituto di Istruzione Superiore "Pininfarina" – Moncalieri (TO)

[6] Docente di matematica e fisica presso il Liceo Statale "Francesco Corradini" -Thiene (VI)

Abstract

Il Programma INFN Docenti (PID), svolto presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, offre ogni anno ai docenti della scuola secondaria percorsi intensivi che integrano lezioni e attività di laboratorio, fornendo una panoramica sulla fisica degli acceleratori e sulle relative applicazioni interdisciplinari. In questo quadro, la spettroscopia gamma si configura come uno strumento didattico ad alto valore formativo, capace di connettere in modo coerente concetti di fisica quantistica e di fisica nucleare all'interno di una programmazione per la classe quinta del liceo. La proposta guida gli studenti dalla costruzione dello spettro alla sua lettura e interpretazione, a partire dai processi di interazione radiazione-materia già affrontati a scuola (in particolare effetto fotoelettrico ed effetto Compton). Infine, è centrale il contributo delle diverse discipline in un dibattito multidisciplinare che, partendo dall'"impronta spettrale", conduce alla legge del decadimento radioattivo, valorizzando connessioni tra saperi e competenze trasversali utili sia per il colloquio orale dell'Esame di Stato sia per il portfolio dello studente.

INFN-LNL-283/2024

1. Rilevanza disciplinare, metodologica e sociale

Il ramo della spettroscopia si configura come un cruciale ponte concettuale e storico che connette la fisica classica con i fondamenti della fisica moderna. Essa non è semplicemente una tecnica analitica, ma rappresenta una delle evidenze sperimentali primarie che hanno condotto alla comprensione della struttura atomica. L'analisi della luce emessa o assorbita dagli atomi e dalle molecole ha infatti rivelato la quantizzazione dell'energia e l'esistenza di livelli energetici discreti, concetti rivoluzionari che superano la visione classica di energia continua.
Allo stesso modo, la spettroscopia ottica si pone come una chiave interpretativa fondamentale per decifrare i complessi fenomeni di interazione tra la luce e la materia. Attraverso lo studio degli spettri, è possibile sondare le proprietà elettroniche, vibrazionali e rotazionali delle entità microscopiche, fornendo informazioni dettagliate sulla loro composizione, struttura e dinamica.

L'importanza della spettroscopia è ampiamente riconosciuta su diversi piani:

1. *Rilevanza disciplinare*. Parte integrante del curriculum della didattica della fisica in alcuni istituti tecnici e licei nella programmazione di fisica e di chimica o chimica dei materiali; è fondamentale per la comprensione della fisica moderna, per le conoscenze della struttura atomica le quali forniscono agli studenti una base solida per capire concetti più avanzati in chimica e fisica, come i modelli atomici, legami chimici e la quantizzazione dell'energia.

2. *Rilevanza di tipo metodologico*. Gli esperimenti semplici sono fonte di stimolo, di interesse e curiosità per gli studenti per mezzo dell'osservazione degli spettri di emissione di diverse lampade o la costruzione di uno spettroscopio semplice, la lettura ed interpretazione degli spettri. Ciò permette di sviluppare importanti competenze nell'analisi di dati quantitativi e nella capacità di trarre conclusioni basate sull'evidenza sperimentale.

3. *Rilevanza di tipo sociale*. Impatto significativo sulla nostra società e sull'orientamento in uscita per lo studente in vari campi: astrofisica, beni culturali, sicurezza e controllo qualità dei prodotti in ambito industriale, monitoraggio dell'inquinamento ambientale.

L'ultimo punto riveste un'importanza cruciale poiché mette in evidenza la natura multidisciplinare dello studio della spettroscopia. Questa peculiarità non costituisce soltanto una ricchezza formativa, capace di generare connessioni tra differenti aree del sapere, ma si configura anche come un prezioso strumento di orientamento in vista delle scelte universitarie e professionali.

Negli ultimi anni la letteratura di ricerca in didattica della fisica ha evidenziato la necessità di introdurre nelle scuole superiori argomenti capaci di stimolare la motivazione degli studenti e di mostrare come i concetti appresi in aula siano alla base della ricerca scientifica contemporanea.

La spettroscopia è una delle metodologie più diffuse e importanti nell'indagine fisica [1–6]. Essa è cruciale in molte ricerche sul mondo microscopico, sia con onde elettromagnetiche che con particelle. Tra questi argomenti rientrano anche quelli che si trovano oggi all'avanguardia della ricerca in fisica, come la rivelazione dei raggi gamma in astronomia, che ci offre nuove prospettive sulla meccanica e la composizione delle esplosioni di supernovae [7], e potrebbe fornire nuova luce sulle onde gravitazionali [8]. La rivelazione dei raggi gamma è inoltre impiegata in altre applicazioni rilevanti [9]. Infatti essa costituisce uno dei più validi metodi di indagine nel campo della Fisica Nucleare, largamente impiegata sia nella ricerca di base sia, in campo applicativo, come strumento di misura della radioattività.

La presente trattazione ha come oggetto questo secondo aspetto, vale a dire la spettrometria intesa come strumento di misura della radioattività. Da questo punto di vista, i vantaggi di questa tecnica sono molteplici: in primo luogo essa rende possibili analisi non distruttive ed è applicabile senza particolari difficoltà a campioni di natura anche molto diversa; inoltre, essa permette la determinazione simultanea di più radionuclidi consentendo di evitare lunghe e costose separazioni chimiche. In questa prospettiva la spettrometria viene largamente impiegata in numerosi campi della ricerca applicata: fisica sanitaria, radioecologia, medicina mucleare, ricerche e applicazioni in campo biologico, agrario e farmacologico che comportino l'impiego di traccianti radioattivi.

2. Nodi concettuali in letteratura

La letteratura evidenzia come la spettroscopia costituisca un argomento particolarmente impegnativo per gli studenti [10]. Tra le difficoltà più ricorrenti figurano: il distinguere i livelli energetici dell'atomo dall'energia dei fotoni emessi—ossia la comprensione che le righe spettrali corrispondono a differenze di energia tra livelli, non ai livelli stessi [11] e la costruzione dello spettro a partire da eventi singoli. A ciò si aggiunge un errore di lettura molto diffuso: l'asse verticale viene spesso interpretato come energia anziché come numero di eventi [12].

Nel nostro contesto didattico si presenta inoltre una sfida specifica: la possibilità che più particelle vengano assorbite nello stesso istante (pile-up), con conseguente somma delle energie nel segnale registrato. Ne deriva che, ad esempio, l'assorbimento simultaneo di una particella da 100 keV e di una da 300 keV produce nello spettro un unico evento da 400 keV, e non due eventi separati da 100 e 300 keV. Abbiamo riscontrato che questo punto, benché cruciale per l'interpretazione dei dati, risulta inedito o poco familiare anche a parte dei docenti e dei ricercatori in didattica con cui abbiamo dialogato durante lo sviluppo del corso. Lo studio preliminare della letteratura, pur non esaustivo, conferma un quadro di criticità concettuali sistematiche nella scuola secondaria e nell'università.

In primis, il legame tra righe spettrali, livelli atomici e condizioni sperimentali è spesso frainteso: molti studenti stabiliscono una corrispondenza 1:1 tra una riga e un singolo livello, invece di riconoscere che ogni riga è l'esito di una transizione tra due livelli [13-14]. Il nodo si ramifica ulteriormente: il livello fondamentale talora non è riconosciuto come livello distinto oppure è ritenuto coinvolto in ogni transizione [10-15-16]. Nei corsi introduttivi di astronomia—dove la spettroscopia è lo strumento principe per inferire le proprietà degli oggetti celesti - emergono ulteriori incertezze nella descrizione dei processi di emissione [17]. Un'altra misconcezione frequente, documentata anche tra gli universitari, è l'idea che l'energia della radiazione sia legata all'intensità del segnale piuttosto che al suo colore (lunghezza d'onda/frequenza) [18]. Tale concezione rivela una comprensione insufficiente sia del modello quantistico dell'atomo sia del modello quantistico della luce, con ricadute sulle previsioni riguardo a emissione e assorbimento [19]. La letteratura segnala inoltre la persistenza di modelli spontanei sulla formazione degli spettri discreti e sul loro legame con la struttura quantizzata della materia, che vanno esplicitamente superati [20]. Anche il ruolo dell'apparato sperimentale è spesso frainteso: molti studenti attribuiscono al prisma la produzione "necessaria" di spettri continui e al reticolo quella di spettri discreti, indipendentemente dalla natura della sorgente [10-15].

Alla luce di queste evidenze, è opportuno ai fini didattici connettere sistematicamente le osservazioni macroscopiche (righe e spettri) con le interpretazioni microscopiche (struttura energetica e transizioni), integrando attività esplorative e momenti di esplicitazione dei modelli. Questa impostazione è coerente con l'indicazione di Viennot [21]: partire dagli "angoli di attacco" spontanei degli studenti e valorizzare le loro idee di senso comune costituisce una condizione necessaria per promuovere apprendimenti significativi.

3. Strategie e Metodi

Nei programmi didattici delle scuole superiori dell' UE, la fisica moderna è considerata una materia fondamentale. Tuttavia, permangono delle questioni irrisolte riguardo a come insegnarla concretamente e quali argomenti specifici includere, così come quali strumenti e metodologie adottare. Nella pratica didattica, si osserva frequentemente un approccio che si limita a descrivere i nodi concettuali e le loro soluzioni teoriche, ponendo l'accento sugli eventi chiave che hanno segnato la storia della fisica all'inizio del Novecento.

Questo approccio spesso trascura la costruzione di una base concettuale, disciplinare e operativa solida delle teorie, impedendo lo sviluppo di una comprensione culturale che integri le nuove teorie con gli strumenti e le metodologie proprie della fisica [22]. Le recenti ricerche scientifiche internazionali sull'apprendimento e l'insegnamento della spettroscopia nelle scuole superiori hanno posto l'attenzione sull'importanza del coinvolgimento attivo degli studenti nell'esplorazione dei fenomeni microscopici legati all'interazione luce-materia. Un obiettivo primario è sviluppare una comprensione pratica del nesso concettuale tra i livelli energetici discreti negli atomi e le specifiche emissioni luminose che ne derivano. Nell'ambito dello studio della spettroscopia, la storia della fisica è impiegata come strumento educativo a sostegno delle attività pratiche.

Nel contesto della spettroscopia gamma, negli ultimi anni lo sviluppo dei rivelatori a stato solido nella didattica hands-on ha rivoluzionato il panorama dei dispositivi didattici disponibili quali kit "chiavi in mano" https://www.caen.it/subfamilies/educational-kits/) e progetti educational «fai-da-te» (DIY), da realizzare con materiali commerciali rappresentano un elemento centrale per la costruzione di efficaci sequenze didattiche.

Secondo la letteratura in didattica, un approccio educativo incentrato sull'esplorazione dei nodi concettuali e delle idee intuitive degli studenti costituisce un elemento fondamentale per innescare il processo di apprendimento [21]. In questo quadro, si adotta un metodo induttivo per la costruzione dei concetti chiave della spettroscopia, partendo dall'analisi dei fenomeni osservabili [23-24]. Un'efficace strategia didattica in tal senso è il modello PEC (Previsione, Esperimento, Confronto), che incoraggia gli studenti a esplicitare le proprie ipotesi e i propri ragionamenti. Questo processo mira a sviluppare diverse abilità cognitive e a promuovere una metodologia di problem-solving. Inoltre, il metodo PEC favorisce la consapevolezza che uno stesso fenomeno può essere interpretato da diverse prospettive disciplinarmente valide, sviluppando negli studenti la capacità di selezionare l'approccio più efficace per la risoluzione di un dato problema[25] .

Per la realizzazione di questo percorso sarà importante unire le seguenti modalità didattiche:

- il modello teorico TS-PCK (Topic-Specific Pedagogical Content Knowledge), ampiamente riconosciuto nella letteratura della didattica della fisica, poiché consente di trasformare

macroaree complesse in sequenze didattiche efficaci adatta agli studenti delle scuole superiori in alcune fasi della proposta didattica. È costituto da 5 fasi: fase di brainstorming iniziale, fase di osservazione, riflessione, fase di descrizione e fase esplicativa [26].
- Attività di debate
- Attività laboratoriali tradizionali e di inquiry.
- Didattica per immagini.
- Approccio multidisciplinare fra le discipline STEM con l'obiettivo di stimolare la riflessione critica, la collaborazione fra diverse aree del sapere e cercare di interpretare problemi in maniera integrata.

In aggiunta, per un efficace monitoraggio degli apprendimenti, il docente considera l'utilizzo di una varietà di strumenti e metodologie, tra cui: test d'indagine e questionari ("in-out") per rilevare i progressi; questionari; schede tutorial basate su approcci come l'Inquiry-Based Learning (IBL); interviste dirette con gli studenti; videoregistrazioni delle attività in classe.

4. Proposta didattica per l'inserimento della Spettroscopia Gamma nella classe quinta

L'esperienza avuta nei laboratori di Legnaro può suggerire un approccio differente da proporre come filosofia di studio e analisi laboratoriale di alcuni concetti e fenomeni fondamentali della fisica moderna. Non solo contenuti, in verità, ma anche un raccordo con la vita quotidiana dei ricercatori impegnati nei vari fronti di indagine, attraverso la conoscenza diretta delle attività specifiche che essi effettuano (modellizzazione, progettazione, ideazione e costruzione di apparati sperimentali, controllo e validazione, sessioni di misure, analisi dati, presentazione e discussione dei risultati, documentazione).

Inoltre, l'esperienza vissuta da noi docenti è un valore aggiunto per la nostra formazione disciplinare in quanto permette di riflettere su come inserire argomenti di ricerca all'interno della regolare programmazione curriculare.

La spettroscopia Gamma rappresenta una macroarea di approfondimento e potenziamento all'interno del programma di fisica interdisciplinare con chimica e analisi matematica per una classe quinta relativa alla macroarea di fisica nucleare, uno degli ultimi capitoli del libro di 5° anno. Gli studenti devono avere le seguenti conoscenze per affrontare tale macroarea:

- Radiazioni e nuclei: conoscenza dei modelli atomici, isotopo, livelli energetici, processi di decadimento, legge di conservazione dell'energia a seguito del decadimento, legge di decadimento radioattivo.
- Teoria dei quanti.
- Interazione luce- materia con l'effetto fotoelettrico ed effetto Compton.
- Competenze matematiche ed operative di base quali proporzionalità, funzioni lineari ed esponenziali/log; derivate; integrali; notazione scientifica e conversioni di unità, teoria degli errori, lettura di grafici/istogrammi, analisi statistica ed utilizzo di un foglio di calcolo (o Python di base).

La proposta didattica intitolata "Vedere l'invisibile con gli spettri gamma" può essere organizzata dal docente di fisica in un'ottica multidisciplinare, invitando i colleghi di matematica, chimica, informatica e scienze a dare il loro contributo. L'evento può essere rivolto a tutte le classi quinte e tenuto nell'aula magna dell'istituto.

Qui si seguito le fasi dell'attività che un docente può tenere come linea guida:

Fase 1

Il docente prepara un test su Google Moduli da condividere con gli account istituzionali degli studenti che partecipano all'attività di indagine in aula magna. Di seguito è riportata la lista delle domande da proporre.

- Cosa accade all'interno di un nucleo atomico quando non è stabile? Cosa viene emesso e perché?
- Perché alcuni nuclei sono stabili e altri instabili? Che ruolo ha il rapporto N/Z?
- Cosa significa che un nucleo è in stato eccitato e perché può emettere un fotone ad energia ben definita?
- Cosa intendiamo per legge di decadimento? Perché è di tipo esponenziale?
- Perché il tempo di dimezzamento è una proprietà statistica del nuclide e non di un singolo atomo?
- Come identificheresti sperimentalmente un decadimento da una serie di misure di conteggi nel tempo?
- Riconosci la differenza fra il decadimento α , β e γ ?
- Che ruolo ha il principio di conservazione dell'energia nel mondo microscopico?
- Se un fotone trasferisce tutta la sua energia alla materia, che cosa ti aspetti di vedere nel rivelatore?
- Come potrebbe influire il tipo di materiale (leggero/pesante) sulla probabilità che questo avvenga?
- Che ruolo ha la frequenza (o l'energia) del fotone nell'effetto fotoelettrico? Cosa accade se la sua energia non è sufficiente?
- Cosa rappresenta la "frequenza di soglia" nell'effetto fotoelettrico?
- Perché non si verifica l'emissione di elettroni anche se l'intensità della luce è molto alta, se la sua frequenza è inferiore alla frequenza di soglia?
- Come varia l'energia cinetica massima degli elettroni emessi al variare della frequenza della luce incidente?
- Come differisce l'interazione tra fotone ed elettrone nell'effetto Compton rispetto all'effetto fotoelettrico?
- Cosa dimostra l'effetto Compton sulla natura della luce?
- In che modo la conservazione dell'energia e della quantità di moto sono cruciali per la spiegazione dell'effetto Compton?
- Come si modifica la lunghezza d'onda della luce incidente (o la sua energia) dopo l'interazione con l'elettrone nell'effetto Compton?
- Perché l'effetto Compton è considerato una prova importante a favore della natura corpuscolare della luce (o della radiazione)?

- Se un fotone subisce un'interazione Compton, cosa accade alla sua energia e alla sua direzione?

Le conoscenze concettuali e operative relative all'effetto fotoelettrico e all'effetto Compton devono risultare chiare agli studenti. A supporto della didattica, accanto alle attività di inquiry e alle esperienze di laboratorio, è utile impiegare applet di simulazione (figure 1–2) e ambienti di Remote Lab (https://www.ises.info/index.php/en), che consentono di svolgere attività pratiche con gli stessi obiettivi formativi del laboratorio tradizionale, offrendo al contempo maggiore flessibilità, accessibilità e inclusività.

Agli studenti viene quindi richiesto di redigere una breve descrizione dei grafici generati dalle due simulazioni, mettendo in evidenza le grandezze fisiche coinvolte e le considerazioni essenziali da formulare al variare dei parametri.

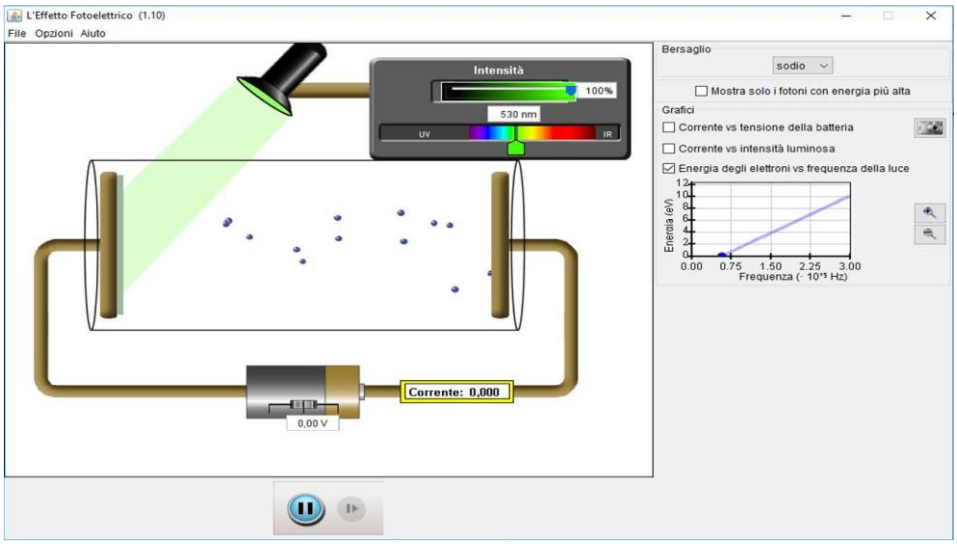


Figura 1 - Screenshot dell'applet per lo studio dell'effetto fotoelettrico, scaricabile all'indirizzo https://phet.colorado.edu/it/simulation/legacy/photoelectric.

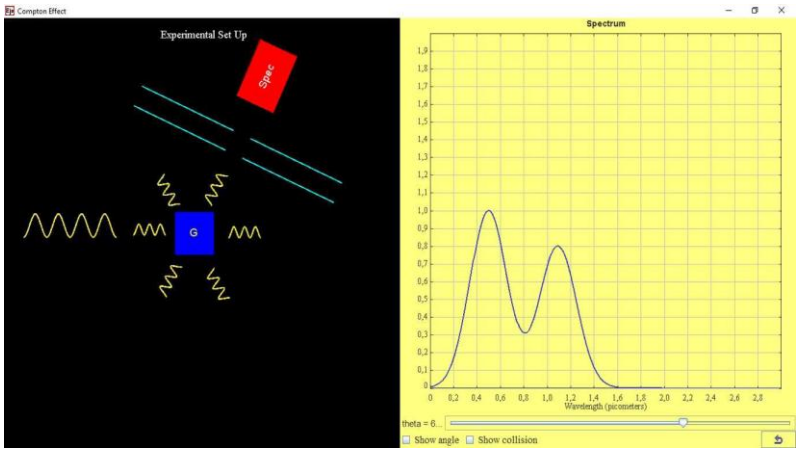


Figura 2 - Screenshot di un'applet per lo studio dell'effetto Compton disponibile all'indirizzo https://www.compadre.org/osp/items/detail.cfm?ID=10531.

Segue un'attività preliminare che consente di analizzare conoscenze e misconcezioni nell'ambito della spettroscopia atomica, con particolare attenzione all'interpretazione delle linee spettrali ottiche in termini di transizioni tra i livelli energetici elettronici dell'atomo. L'attività mira a verificare la presenza dei nodi concettuali individuati dalla letteratura di ricerca, come riportato nella Sezione 2:

- non riconoscono il concetto di salto energetico e tendono a stabilire un legame diretto tra una riga e un singolo livello;
- non riconoscono l'associazione spettro-grafico non partendo appunto dal salto energetico più breve, e poi via via quello successivo considerando che l'ordine dei salti energetici non è, da regolamento, l'ordine di come vedono le righe.
- Durante il passaggio dall'interpretazione dello spettro di emissione di un dato gas ai livelli energetici, si osserva che gli studenti incontrano difficoltà. In particolare, essi non riescono a riconoscere la transizione tra i due livelli più vicini e non riescono ancora una volta a concettualizzare lo spettro sia in termini energetici sia come rappresentazione grafica.

In effetti, gli spettri atomici rappresentano un'opportunità straordinaria per esplorare e rafforzare i concetti di meccanica quantistica che sia noi che gli studenti cerchiamo di formare. La loro interpretazione richiede una corretta concettualizzazione della quantizzazione dell'energia (e non solo) sia a livello atomico che nella radiazione elettromagnetica, e naturalmente, un modello solido per spiegare l'intricata interazione tra essi.

Fase 2

In questa fase del percorso entra in scena la spettroscopia gamma, una tecnica che permette di approfondire i fenomeni di interazione tra luce e materia. A differenza di metodi più complessi come quelli usati per i raggi X, la spettroscopia gamma consente di realizzare un esperimento didatticamente fruibile che, in alcuni casi, richiede un'apparecchiatura facilmente trasportabile.

Dopo la raccolta delle risposte relative alle conoscenze e misconcezioni dello studente nella prima fase, il docente presenta la sua esperienza presso l'INFN di Legnaro l'esperienza svolta sulla spettroscopia gamma con $LaBr_3$ e misura del tempo di decadimento del primo stato eccitato del ^{152}Sm, descrivendo il metodo di analisi, i tre tipi di processo di assorbimento dei raggi gamma nella materia (l'effetto fotoelettrico, l'effetto Compton e la produzione di coppie) e il setup sperimentale.

Di seguito sono riportati i punti principali da approfondire, con le relative immagini da condividere agli studenti per l'analisi e il commento durante l'attività:

- **Livelli nucleari ed energie in gioco.** Schema dei livelli e transizioni: ogni riga γ corrisponde alla differenza di energia tra due livelli del nucleo.

- **Identità chimica invariata.** L'emissione γ è una de-eccitazione**:** Z e A non cambiano **(**niente trasmutazione dell'elemento)**.**

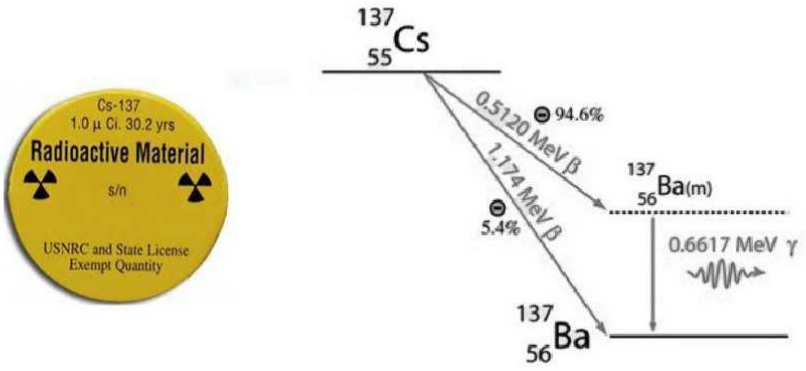


Figura 3 - Campione di Cesio-137 e relativo schema di decadimento.

- **Interazione radiazione–materia: parametri rilevanti.** Dipendenza qualitativa da energia del fotone**,** numero atomico Z **e** densità/spessore del materiale.

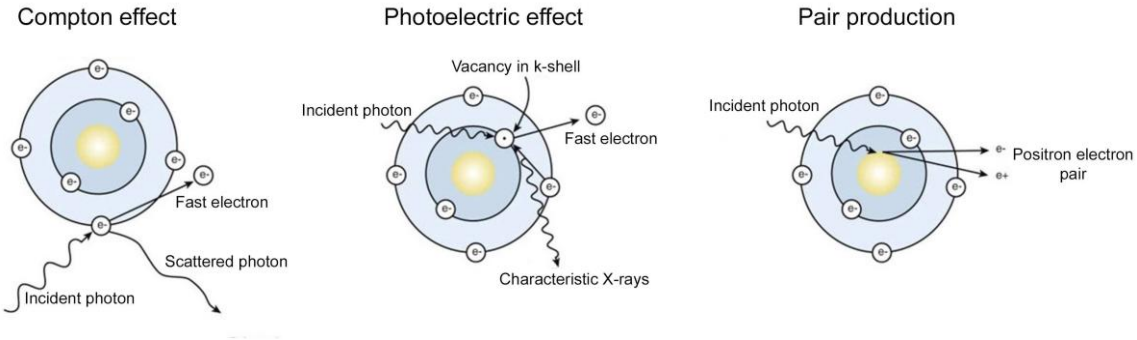


Figura 4 - Schema dei tre principali processi d'interazione radiazione-materia.

- **Produzione di coppie.** Condizione energetica (soglia superiore almeno a 1022 keV) e tracce attese; confronto con altri meccanismi.

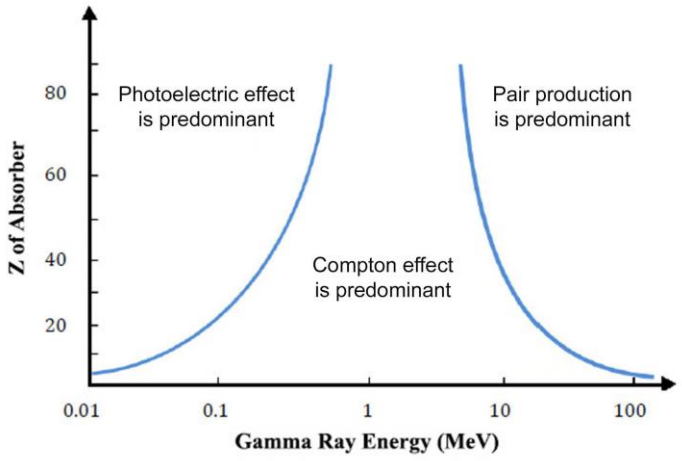


Figura 5 - Schema dei tre principali processi d'interazione radiazione-materia

- **Apparato sperimentale con rilevatore e catena di misura**. Descrizione delle varie parti del set-up sperimentale utilizzato (3 rivelatori al bromuro di lantanio (LaBr3); 1 digitalizzatore 14-bit 500 MHz; sorgenti radioattive)

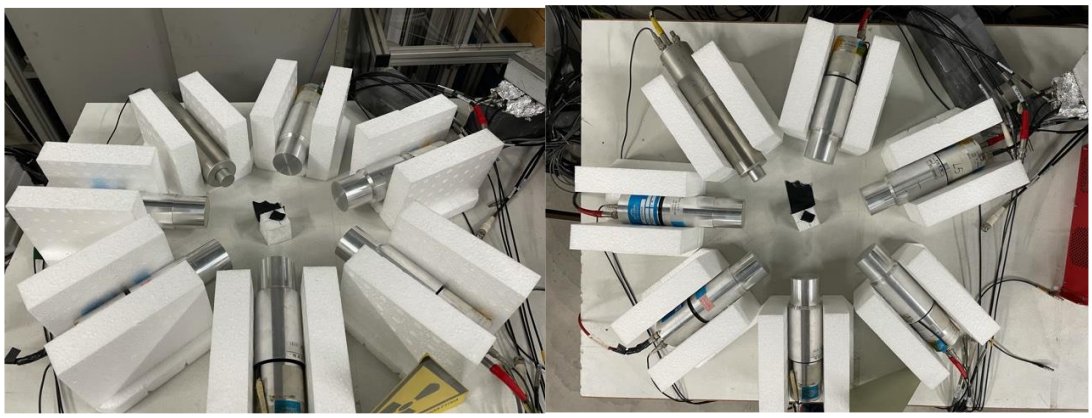


Figura 6 – Foto del set-up sperimentale

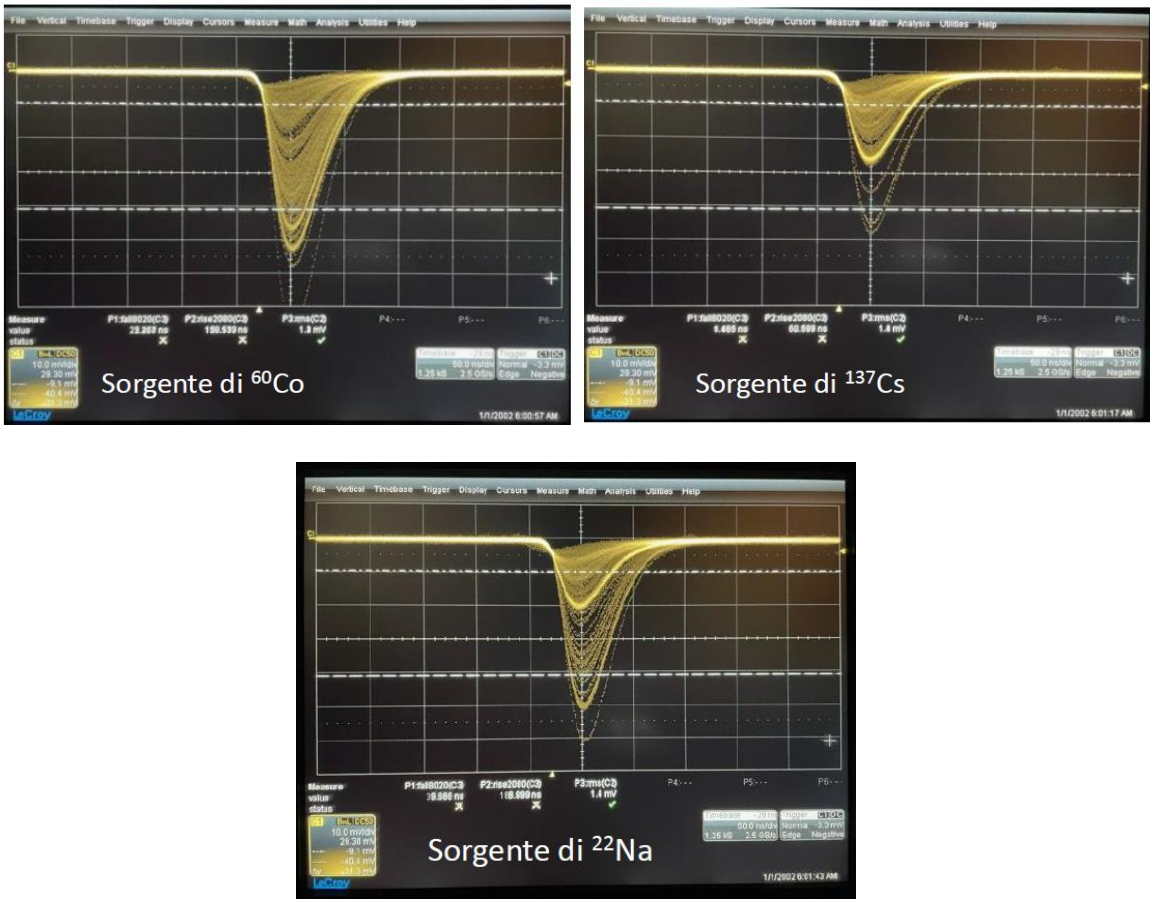


Figura 7 - Segnali delle varie sorgenti radioattive

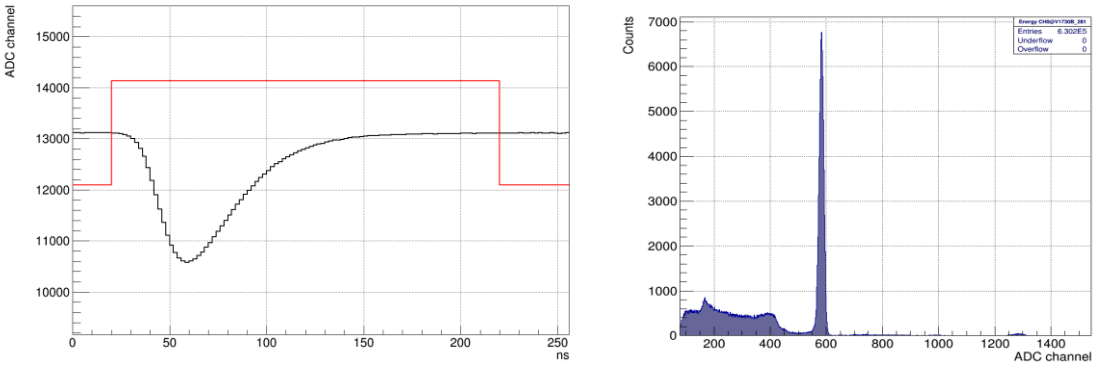
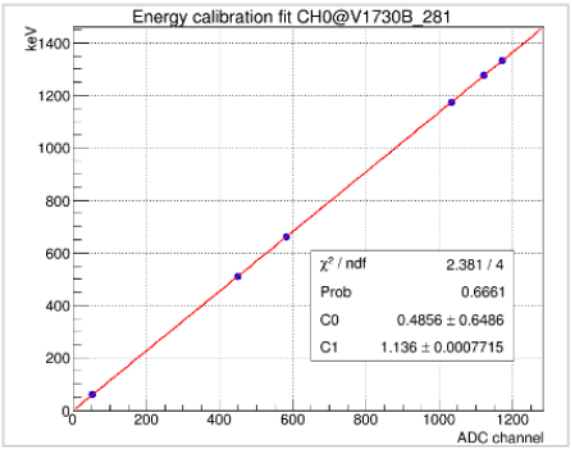


Figura 8 - Digitalizzazione del segnale e integrale del segnale in un istogramma

Di seguito sono elencati gli stadi del setup:

- *Scintillatore*: Il primo stadio del setup sperimentale è un rivelatore al Bromuro di Lantanio (LaBr3), che si comporta come scintillatore, emettendo quindi segnali luminosi di intensità proporzionale alla frequenza della radiazione gamma che riceve dal campione oggetto di indagine. Questa è la parte più importante del sistema dove si vedono applicati tutti i concetti di interazione della radiazione gamma con la materia.
- *Fotomoltiplicatore*: Il segnale luminoso viene successivamente raccolto da un foto moltiplicatore che converte il segnale ottico in segnale elettrico e lo amplifica. Anche in questo caso il fenomeno è spiegato attraverso l'interazione radiazione materia, laddove però vengono eccitati degli elettroni in numero proporzionale alla frequenza del segnale ricevuto.
- *Digitalizzatore*: Il segnale elettrico deve dunque essere elaborato e convertito in una informazione sulla frequenza. Si potrà dunque introdurre rapidamente qualche nozione sulla digitalizzazione di un segnale acquisito nel dominio del tempo e sul suo campionamento. In questo caso è stato utilizzato un campionamento a 500MHz.
- *Analizzatore di canale*: per riuscire a convertire le informazioni dal dominio del tempo a quello delle frequenze è interessante, anche dal punto di vista concettuale, soffermarsi sul fatto che con questo strumento viene realizzata un'applicazione del concetto di integrale che lega in particolare la carica alla corrente. Il segnale acquisito nel tempo infatti viene di fatto integrato in una finestra temporale predefinita per ottenere finalmente l'informazione nel dominio delle frequenze. Dal punto di vista computazionale, si può far riferimento alla costruzione di un istogramma. Il separatore di frequenze utilizzato ha 14 bit e quindi 16384 canali, ciascuno dei quali deve essere associato ad un valore di energia (o frequenza). Molto interessante risulta in questo passaggio l'analisi dei grafici prodotti rispettivamente dal fotomoltiplicatore (figura a sinistra) e dal separatore di canali (a destra): soffermarsi sulle grandezze rappresentate sui due assi cartesiani permette di capire il procedimento computazionale. A valle del fotomoltiplicatore vi è l'intensità del segnale (associato al canale) in funzione del tempo. A valle del separatore di canale, invece, viene rappresentato il numero di conteggi (ottenuti dall'integrale, cioè dalla sommatoria essendo il segnale discretizzato) in funzione del canale digitale.

- **Curva di calibrazione.** Relazione canale → keV: come si costruisce, perché è necessaria, come si usa per leggere correttamente le energie.



Sorgente	Posizione in ADC channel [a.u.]	Energia [keV]
^{241}Am	51.5	59.9
^{22}Na	450.0	511.0
^{137}Cs	582.6	661.7
^{60}Co	1032.4	1173.2
^{22}Na	1121.1	1274.5
^{60}Co	1172.0	1332.5

*Figura 9 - Curva di calibrazione sperimentale Eγ= 0.4856+1.136 *channel*

Il sistema di misura digitale permette di distinguere 16384 canali, ma non associa intrinsecamente ad ogni canale una frequenza, perché non esiste una scala assoluta. E' necessario quindi prima calibrare lo strumento, proprio per fissare un riferimento. La calibrazione dei rivelatori viene svolta acquisendo lo spettro di alcuni elementi noti, in modo da associare ad uno specifico canale un'energia nota.

Nel nostro laboratorio sono stati usati alcuni elementi come il ^{60}Co, le cui righe di emissione di due transizioni note si collocano a 1173 KeV e 1332 KeV.

Il processo di calibrazione sfrutta la proporzionalità lineare tra energia e canale del digitalizzatore: si tratta di trovare la retta di regressione che meglio approssima i punti sperimentali, che si collocano su un piano cartesiano che ha come ascisse il numero del canale e come ordinate l'energia.

L'aspetto della calibrazione si presta molto bene per mostrare un'interessante applicazione della modellizzazione di dati sperimentali attraverso la regressione, in particolare utilizzando un modello lineare in questo caso. Le righe spettrali del ^{60}Co ad esempio, corrispondenti ai 1173 KeV e ai 1332 KeV, nel nostro istogramma sono stati rappresentati dallo strumento in corrispondenza rispettivamente dei canali 7220 e 8189. Concettualmente i dati possono essere considerati come due punti di coordinate (n° canale, energia). Dati due punti quindi è sempre possibile ricavare l'equazione di una retta, ricavandone coefficiente angolare, intercetta e coefficiente di correlazione. L'equazione della retta trovata y= m x + q rappresenta quindi la relazione tra il valore di energia (variabile y) e il numero di canale (variabile x).

- **Acquisizione dello spettro**. Lo spettro si registra come istogramma del numero di eventi in funzione dell'energia. I picchi indicano transizioni a energia definita, mentre continuo e fondo riflettono depositi parziali e rumore; tempo di misura, distanza e schermature ne cambiano l'intensità, non la posizione.

Dopo aver determinato la retta di regressione, è possibile associare a ciascun canale una precisa energia e quindi "scalare" correttamente gli assi cartesiani.

A questo punto, sostituendo al campione di calibrazione il materiale oggetto di indagine, si procede con l'acquisizione dello spettro, in cui i picchi vengono collocati nelle corrispondenti energie. Lo spettro, tuttavia, deve essere interpretato con attenzione: la limitata risoluzione dello strumento comporta spesso la necessità di ricorrere a tecniche di analisi più sofisticate per filtrare il segnale, come ad esempio le matrici gamma–gamma, che permettono di correlare l'informazione energetica con quella temporale, migliorando la capacità di distinguere i picchi dal rumore di fondo. Una volta identificate con sufficiente confidenza le energie delle transizioni, ci si avvale delle tabelle nucleari e della conoscenza dei meccanismi di decadimento per attribuire i picchi osservati agli elementi che li hanno originati.

Nel nostro esperimento, il campione analizzato è risultato essere ^{152}Eu, caratterizzato da due transizioni principali a 121 keV e 1408 keV. Questo percorso consente anche di ragionare sul concetto di risoluzione assoluta e relativa (errore assoluto e relativo) in termini di energia, sulla capacità dello strumento di distinguere correttamente picchi vicini e sull'impatto del rumore di fondo, che rappresenta un problema sperimentale di grande rilievo. La qualità della misura dipende in modo significativo dal materiale scintillatore utilizzato, che può rivelarsi determinante per la risoluzione e l'affidabilità complessiva dei dati. Rimangono quindi due domande cruciali per il dibattito didattico e scientifico: quali sono i fattori che influenzano maggiormente la risoluzione? e in che modo si potrebbe migliorarla?

- **Analisi temporale**. La caratterizzazione temporale dei decadimenti completa la lettura spettrale, permettendo di stimare costanti di decadimento e tempi di dimezzamento direttamente dal segnale nel tempo. Questo confronto tra domini (energia/tempo) chiarisce i modelli esponenziali e mette in evidenza i limiti strumentali di risoluzione.

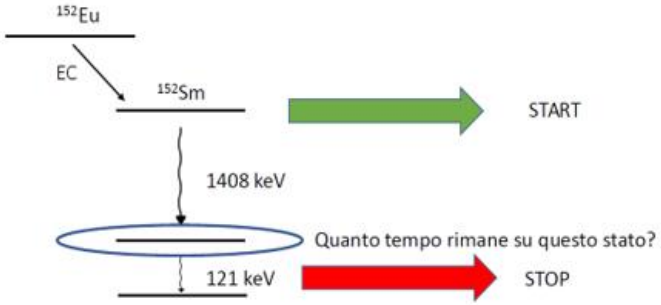
Sebbene il focus dell'attività sia la spettroscopia, cioè l'analisi nel dominio delle frequenze, è didatticamente utile completare il lavoro con una caratterizzazione temporale dei decadimenti γ. Questo parte può risultare interessante per diversi aspetti dal punto di vista didattico:

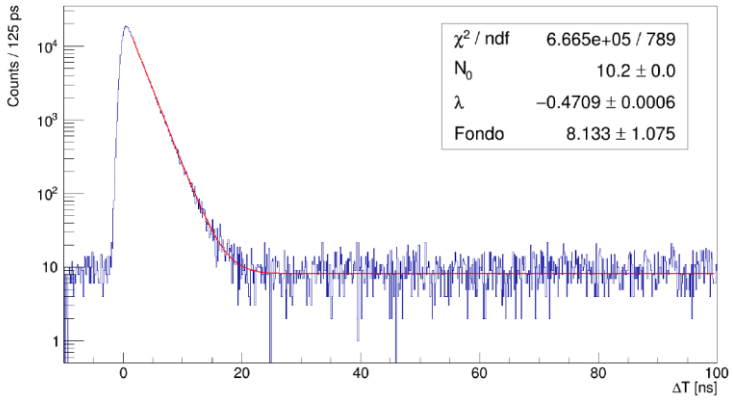
- dal punto di vista metodologico e metacognitivo, è utile per meglio chiarire la differenza, proprio per contrasto, tra i due tipi di analisi, nel dominio delle frequenze e in quello del tempo.
- Può risultare utile per chiarire alcuni fraintendimenti comuni prima evidenziati tra transizione tra due livelli energetici e livello di energia. Infatti ciò che viene misurato, in questo caso, è sostanzialmente il tempo di permanenza in uno stato energetico intermedio, prendendo come "origine" dei tempi l'istante in cui si è verificato il primo decadimento.
- Il tema è pienamente coerente con la programmazione curricolare poiché i decadimenti radioattivi seguono un andamento esponenziale, offrendo un terreno naturale per applicare e interpretare le grandezze fisiche quali la costante di decadimento λ , la vita media τ e tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ secondo il seguente modello $N\,(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ e la seguente relazione $T_{1/2} = \tau \ln(2) = \frac{1}{\lambda}\ln\,(2)$.
- Sul piano sperimentale, l'attività favorisce una riflessione critica sul rapporto tra risoluzione temporale dello strumento e risultati ottenuti: l'elettronica disponibile impone soglie oltre le quali la stima dei tempi di vita risulta poco affidabile, e ciò va esplicitato nell'interpretazione.

Operativamente, tramite l'uso di un oscilloscopio, è possibile osservare e caratterizzare l'andamento temporale del segnale acquisito prima della conversione nel dominio delle frequenze. Anche in questo caso, si ricorre a modelli matematici, cercando la curva esponenziale che meglio approssima l'andamento reale per ricavare la costante di decadimento λ.

Attraverso la risoluzione di una semplice equazione esponenziale, gli studenti possono calcolare il tempo di dimezzamento dell'elemento radioattivo e confrontarlo con i dati teorici, ottenendo un'ulteriore conferma dei risultati trovati tramite l'analisi in frequenza. Questo processo mette in luce l'importanza degli strumenti di misura, discutendo limiti strumentali, le incertezze e la necessità di correlare informazioni di diversa natura per ottenere un risultato affidabile.

In sintesi, questo approccio metodologico di carattere generale, sempre più rilevante per affrontare le sfide scientifiche e tecnologiche moderne, può essere veicolato con grande efficacia attraverso questo esempio sperimentale.





$$T_{1/2} = \tau \ln(2) = \frac{1}{\lambda} \ln(2) = 1.45 \text{ ns}$$

#	Nuclide	E_x [keV]	J^{π}_{order}	Band	$T_{1/2}$	$T_{1/2}$ [s]	Decay modes BR [%]	Isospin	μ [μ_N]	Q [b]	Additional data	Comments
1	$^{152}_{62}Sm_{90}$	0.0	0+	1	STABLE							
2	$^{152}_{62}Sm_{90}$	121.7818 *3*	2+	1	1.403 ns *11*	1.4[illegible]-9			+0.82 *4*	-1.683 *18*		
3	$^{152}_{62}Sm_{90}$	366.4793 *9*	4+	1	57.7 ps *6*	[illegible]7E-11			+1.68 *20*	-2.6 *14*		
4	152	684.751 *21*	0+ *2*	2	6.10 ps *14*	6.1E-12						

Figura 10 – Misure di tempo della sorgente ^{152}Eu

- **Schermatura e fondi.** Ruolo dei materiali schermanti; radioattività interna del rivelatore e fondo ambientale; cosa cambia nei grafici (intensità) e cosa non cambia (posizione in energia).

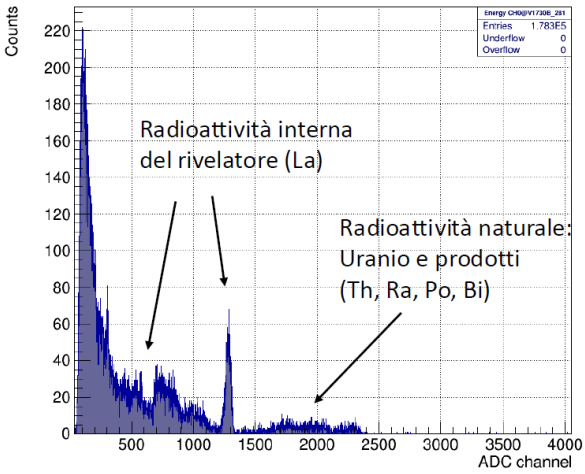
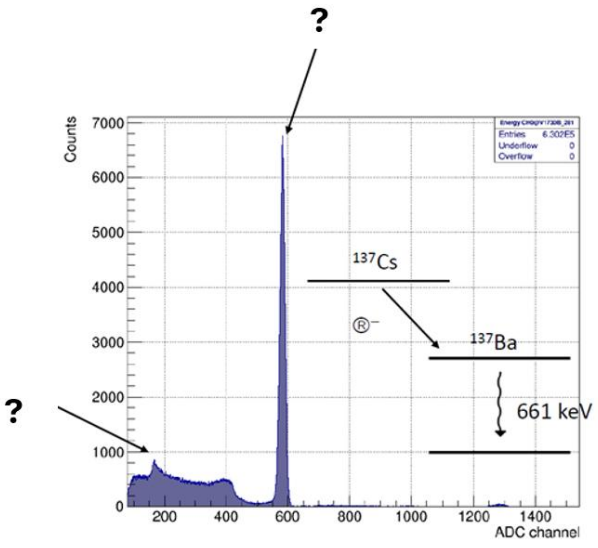


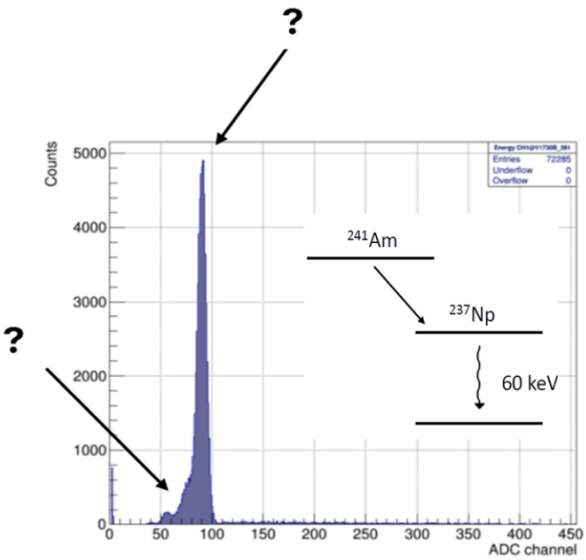
Figura 11 - Misura senza la sorgente della radioattività interna e fondo ambientale

- **Sicurezza in laboratorio.** Regole essenziali: procedure, distanze, tempi, schermature, gestione dei dispositivi e dei dati.

<u>Fase 3</u>

Il docente condivide i grafici relativi agli spettri delle varie sorgenti note (^{137}Cs, ^{241}Am, ^{22}Na, ^{60}Co)





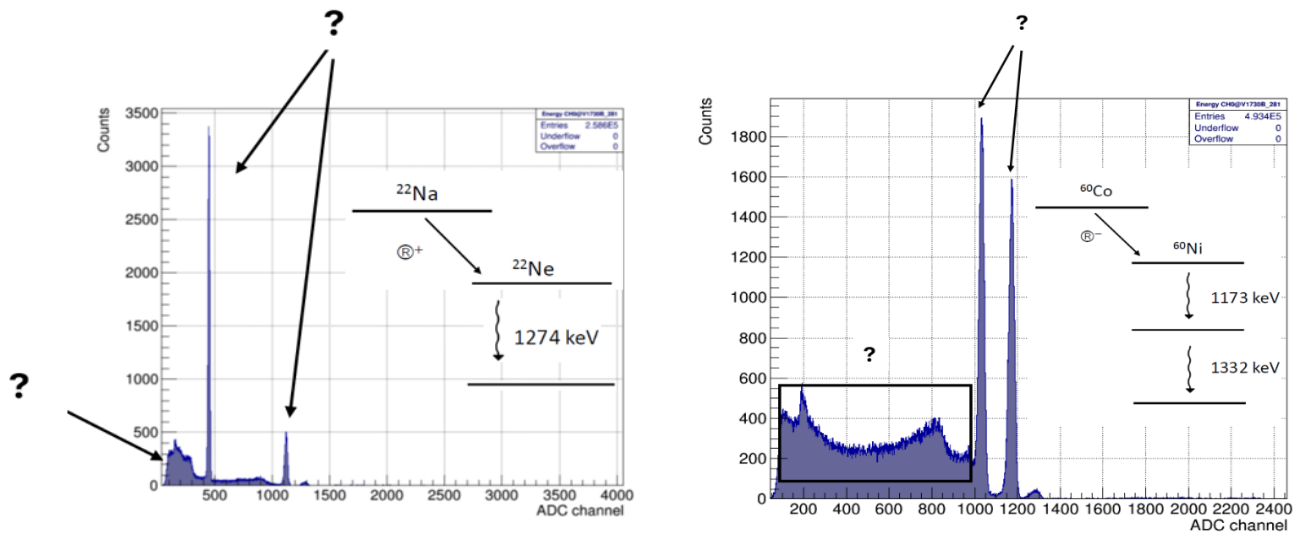


Figura 12 – Grafici degli spettri gamma relativi alle sorgenti note con il rilevatore LaBr3

In questa fase, l'obiettivo è guidare gli studenti dalla lettura degli assi alla costruzione del significato fisico dei picchi e del continuo, senza anticipare risposte ma sollecitando debate e spiegazioni argomentate.

Il docente presenta gli spettri e chiede innanzitutto di esplicitare che cosa si sta misurando: «Che informazione porta l'asse orizzontale e che cosa rappresenta l'asse verticale? In che senso la posizione di una struttura dice qualcosa sull'energia mentre l'altezza o l'area dicono qualcosa sull'intensità?».

Per lo spettro del ^{241}Am, caratterizzato da una riga intorno a ~60 keV, si propone di osservare la struttura stretta e le eventuali componenti a energie più basse: «Quali indizi nel grafico vi fanno pensare a una transizione a energia ben definita? Che cosa rimane invariato se raddoppiamo il tempo di acquisizione o allontaniamo la sorgente, e che cosa invece cambia? In che modo ragionereste per distinguere una riga caratteristica da contributi a energia minore legati all'apparato o al campione?». Qui l'attenzione è sulla lettura operativa: leggere il rumore di fondo, come stimare l'area e la FWHM, e spiegare perché la riga rimane nella stessa posizione mentre varia la statistica dei conteggi.

Passando al ^{137}Cs, dove oltre al foto-picco compare un continuo esteso con un bordo superiore, si chiede di collegare forma del grafico e processi di interazione: «Perché, accanto a una struttura stretta, compare una regione continua di depositi di energia? Qual è il significato fisico del "bordo" osservato al limite superiore del continuo e da quali grandezze vi aspettate che dipenda? In che modo argomentereste che questa parte del grafico non è semplice rumore elettronico ma porta informazioni sull'interazione della radiazione con il materiale?». Le risposte dovrebbero mettere in relazione la varietà di energie depositate con urti che cedono solo parte dell'energia, e riconoscere che il bordo rappresenta il massimo trasferimento possibile in quelle condizioni.

Con lo spettro del ^{22}Na, che mostra due righe ben distinte, l'attenzione si sposta sull'interpretazione comparata: «Perché vediamo due picchi e come potreste stabilire quale dei due corrisponde alla riga di energia minore? Cosa puoi dire della regione continua?». Qui è utile chiedere agli studenti di esplicitare il ragionamento: prima l'ordine in energia tramite la calibrazione, poi l'uso della tabella delle energie attese per verificare l'identificazione, infine il commento qualitativo sul diverso equilibrio tra struttura stretta e continuo.

Sul ^{60}Co, con due righe ad alta energia ravvicinate, si apre la discussione su risoluzione e possibili effetti strumentali: «Quali elementi del grafico vi permettono di parlare di risoluzione del sistema di misura? Come cambierebbe la vostra capacità di separare i due picchi se la FWHM relativa peggiorasse? In quali condizioni osservereste un evento alla somma delle due energie e come lo distinguereste da una vera nuova riga fisica?». Le spiegazioni dovrebbero collegare la larghezza a metà altezza alla risoluzione, chiarire che un picco alla somma nasce da eventi quasi simultanei registrati come uno solo e proporre strategie di verifica (ad esempio variazione del rate o finestra di acquisizione).

In tutti i grafici si sollecita infine il confronto tra condizioni sperimentali: «Che cosa accade alle aree e alla regolarità del grafico se aumentiamo il tempo di misura? Che cosa cambia se interponiamo uno schermo tra sorgente e rivelatore: si spostano le energie o si modificano soltanto i conteggi? In che modo la distanza influenza l'aspetto del grafico e quali possono essere le conclusioni fisiche ?». L'intento è far emergere e correggere misconcezioni ricorrenti: tempo, distanza e schermatura non modificano l'energia dei picchi, ma incidono sulla statistica, sul rapporto segnale/rumore e sull'attenuazione dell'intensità.

Il percorso si chiude con due richieste aperte, valide per ogni spettro analizzato: «Scrivete in tre frasi come siete passati dall'immagine del grafico alla conclusione fisica, citando i parametri e le grandezze fisiche che si sono utilizzate. Indicate un possibile errore di interpretazione che avete evitato o corretto durante l'analisi con il docente e spiegate perché non è compatibile con i dati osservati».

Infine si passa alla fase esplicativa del docente analizzando e approfondendo le caratteristiche dello spettro γ quali: fotopicco; distribuzione Compton; picco di retrodiffusione; picchi di fuga; picchi somma. Per l'analisi quantitativa dei picchi è opportuno esaminare il significato fisico dei parametri FWHM (Full Width at Half Maximum), area del picco, rapporto segnale/rumore e rumore di fondo, poiché determinano risoluzione, sensibilità e affidabilità della misura.

In questo modo, l'esercizio di lettura diventa un'argomentazione basata su prove, pensiero critico e autocorrezione. Così lo spettro gamma viene usato come un vero "testo" scientifico: si comprende che l'energia si legge dalla posizione, l'intensità dall'area, le forme dal modo in cui la radiazione scambia energia con la materia, e che la qualità delle conclusioni dipende dalla cura con cui si calibra e si trattano fondo e incertezze.

Fase 4

La fase conclusiva del percorso didattico è interamente dedicata a un dibattito multidisciplinare che intreccia la lettura degli spettri gamma con la caratterizzazione temporale del decadimento radioattivo. Ogni docente invitato, esperto della propria materia, ha il compito di mettere in luce gli aspetti disciplinari e le applicazioni pratiche che la spettroscopia gamma rivela nel proprio campo.

Un esempio di intervento da parte del docente di matematica è qui di seguito descritto.

Può partire dal "concetto intuitivo di tempo di dimezzamento" e dalla sequenza dei dimezzamenti per riconoscere l'andamento esponenziale mettendo così in evidenza il legame tra il decadimento e le funzioni esponenziali naturali formalizzando il passaggio da $N\,(t) = N_0 2^{-t/T_{1/2}}$ alla forma generale $N\,(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ con l'introduzione operativa della costante di decadimento $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$.

Essa fornisce il ponte concettuale tra i due domini, rendendo coerente dal punto di vista fisico la stima di $T_{1/2}$ dal segnale nel tempo con l'identificazione spettrale delle transizioni.

Il passaggio cruciale è il cambio di prospettiva, secondo la quale il docente di matematica applica un'interpretazione probabilistica: invece di guardare al numero complessivo di nuclei, considera il tempo di vita di un singolo nucleo non ancora decaduto. Si introduce la variabile casuale continua T e si osserva che:

$$N\,(t) = \; N_0 P\,(T > t)$$

Ne segue che:

$$P\,(T > t) = \; e^{-\lambda t}$$

Si invitano gli studenti a ricavare la funzione di ripartizione:

$$F_T(t) = P\,(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

ed a derivare la densità di probabilità:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}\,, \quad t \geq 0$$

In questa fase dell'intervento, il docente di matematica esplicita le seguenti definizioni [27-28-29]:

- La distribuzione esponenziale descrive il tempo di vita dei nuclei instabili.
- La costante λ acquista un duplice significato: è il tasso istantaneo di decadimento e rappresenta, per intervalli molto brevi Δt, la probabilità approssimata che un nucleo decada $P\,(decadimento\ in\ \Delta t) \approx \lambda \Delta t$.

Si conclude con un'attività di PBL, condividendo a ciascun gruppo problemi di realtà dati di isotopi reali (es. ^{60}Co, ^{137}Cs) per confrontare la stima sperimentale con i valori tabulati, in coerenza con l'identificazione spettrale svolta nella parte energetica del percorso. Inoltre, tale percorso ha l'obiettivo di consolidare la comprensione e di aprire il dibattito al tema delle applicazioni (diagnostica medica, datazioni archeologiche, sicurezza ambientale).

Durante il dibattito in aula magna, il docente di matematica evidenzia i punti di forza della scelta didattica: ci si discosta dall'impostazione classica basata sull'equazione differenziale, il quale richiede competenze non ancora acquisite dagli studenti, e si parte da situazioni semplici e concrete (il concetto di dimezzamento). Si osservano i dati, se ne riconosce l'andamento esponenziale e, successivamente, si introduce la costante di decadimento λ , che consente di generalizzare il modello e, al contempo, di consolidare conoscenze matematiche già note (logaritmi ed esponenziali). La prospettiva probabilistica collega il modello macroscopico a una descrizione microscopica più realistica, attribuendo un significato chiaro al parametro λ.

Questo approccio induttivo e di costruzione concettuale arricchisce la progettazione didattica sulla spettroscopia gamma, rendendo l'itinerario più accessibile e trasferibile in una quinta liceo. L**'**interdisciplinarità emerge come pratica di pensiero e competenza chiave per l'Esame di Stato **e** per la cittadinanza scientifica: saper leggere grafici, stimare parametri, valutare i limiti strumentali e sviluppare soft skills proprie di attività PBL e di inquiry, indispensabili alla formazione di cittadini critici e consapevoli.

5. Conclusioni e considerazioni

La didattica della fisica, quando è applicata alla realtà e al mondo della ricerca, offre numerosi spunti per progettare e realizzare percorsi di apprendimento con una forte impronta laboratoriale e un'evidente dimensione interdisciplinare, da tempo riconosciuta come elemento centrale anche nella ricerca in didattica. La proposta qui presentata si colloca in questa prospettiva e rappresenta al tempo stesso un punto di partenza e una linea guida per i docenti dei licei. È fondamentale investire con continuità nella formazione e nell'aggiornamento degli insegnanti, non solo per quanto riguarda i contenuti della fisica moderna, ma anche per l'utilizzo della strumentazione di ricerca.

Questa necessità si intreccia con l'importanza di rafforzare la collaborazione con università e centri di ricerca. In tale contesto, l'esperienza maturata attraverso il progetto PID (Programma INFN per Docenti) presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN ha reso possibile instaurare una proficua collaborazione scuola–centro di ricerca. Ha inoltre offerto l'opportunità di condividere con gli studenti le affascinanti applicazioni della fisica moderna, in particolare nei campi della fisica delle particelle e della fisica nucleare, avvicinando così le nuove generazioni al mondo della ricerca e stimolando futuri talenti nell'ambito STEM.

Ringraziamenti

Si ringraziano lo staff dell'organizzazione del progetto PID 2024 e, in particolare, il Dr. Andrea Gozzelino, il Dr. Giorgio Chiarelli, la Dr.ssa Silvia Miozzi e l'intero gruppo di ricerca Fisica Nucleare – Vita media al LAE per le immagini e le dispense fornite relative al set-up sperimentale, alle misure e ai grafici dell'esperienza.

Riferimenti bibliografici

[1] Federico, C.; Michelini, M. (2018). A didactic proposal about Rutherford backscattering spectrometry with theoretic, experimental, simulation and application activities. European Journal of Physics, 39.

[2] Siegbahn, K. (Ed.) (1979). Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy. Amsterdam: Elsevier.

[3] L'Annunziata, M. F. (Ed.) (2004). Handbook of Radioactivity Analysis (2nd ed.). Amsterdam: Elsevier.

[4] Glushkov, A. V.; Khetselius, O. Y.; Lovett, L. (n.d.). Electron-β-nuclear spectroscopy of atoms and molecules and chemical bond effect on the β-decay parameters. In P. Piecuch et al. (Eds.), Advances in the Theory of Atomic and Molecular Systems (Progress in Theoretical Chemistry and Physics, vol. 20). Dordrecht: Springer.

[5] Davydov, A. V. (2015). Advances in Gamma Ray Resonant Scattering and Absorption. Cham: Springer.

[6] Buongiorno, D.; Michelini, M. (n.d.). Research-based proposals on optical spectroscopy and secondary students' learning outcomes. Journal of Physics: Conference Series, 1287, 012004.

[7] Boggs, S. E. et al. (2015). 44Ti gamma-ray emission lines from SN1987A reveal an asymmetric explosion. Science.

[8] Abbott, B. P. et al. (2017). Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. Astrophysical Journal Letters.

[9] Jenkins, D. (2020). Radiation Detection for Nuclear Physics: Methods and Industrial Applications. Bristol: IOP Publishing.

[10] Ivanjek, L.; Shaffer, P. S.; McDermott, L. C.; Planinić, M.; Veza, D. (2015). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory spectroscopy. I. Identifying student difficulties with atomic emission spectra. American Journal of Physics.

[11] Savall-Alemany, F.; Domènech-Blanco, J. L.; Guisasola, J.; Martínez-Torregrosa, J. (2016). Identifying student and teacher difficulties in interpreting atomic spectra using a quantum model of emission and absorption of radiation. Physical Review Physics Education Research.

[12] Savall-Alemany, F.; Guisasola, J.; Cintas, S. R.; Martínez-Torregrosa, J. (2019). Problem-based structure for a teaching-learning sequence to overcome students' difficulties when learning about atomic spectra. Physical Review Physics Education Research.

[13] Rebello, N. S.; Cumaranatunge, C.; Escalada, L. T.; Zollman, D. A. (1998). Simulating the spectra of light sources. Computers in Physics, 12(1), 28.

[14] Zollman, D. A.; Rebello, N. S.; Hogg, K. (2002). Quantum mechanics for everyone: Hands-on activities integrated with technology. American Journal of Physics, 70(3), 252.

[15] Ivanjek, L. (2012). An investigation of conceptual understanding of atomic spectra among university students (Ph.D. thesis). University of Zagreb.

[16] Körhasan (Didiş Körhasan), N. D.; Wang, L. (2016). Students' mental models of atomic spectra. Chemistry Education Research and Practice, 17, 743–755.

[17] Bardar, E. M.; Prather, E. E.; Brecher, K.; Slater, T. F. (2006). The need for a Light and Spectroscopy Concept Inventory for assessing innovations in introductory astronomy survey courses. Astronomy Education Review, 4(2), 20–27.

[18] Lee, S. (2002). Students' understanding of spectra (Ph.D. thesis). Kansas State University.

[19] Savall-Alemany, F.; Domènech-Blanco, J. L.; Guisasola, J.; Martínez-Torregrosa, J. (2016). Identifying student and teacher difficulties in interpreting atomic spectra using a quantum model of emission and absorption of radiation. Physical Review Physics Education Research, 12(1), 010132.

[20] Gilbert, J. K.; Boulter, C.; Rutherford, M. (1998a). Models in explanations, part 1: Horses for courses? International Journal of Science Education, 20(1), 83–97.

[21] Viennot, L. (1996). Raisonner en physique. Paris–Bruxelles: De Boeck Université.

[22] Michelini, M.; Santi, L.; Stefanel, A. (2014). Teaching modern physics in secondary school. In Proceedings of Science (FFP14), 231 (15–18 July 2014).

[23] Chinn, C. A.; Malhotra, B. A. (2002). Epistemologically authentic inquiry in schools: A theoretical framework for evaluating inquiry tasks. Science Education, 86(2), 175–218.

[24] Krajcik, J.; McNeill, K. L.; Reiser, B. J. (2008; early view 2007). Learning-goals-driven design model: Developing curriculum materials that align with national standards and incorporate project-based pedagogy. Science Education, 92(1), 1–32.

[25] Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57, 1–22.

[26] Connor, M. C.; Shultz, G. V. (2018). Teaching assistants' topic-specific pedagogical content knowledge in 1H NMR. Chemistry Education Research and Practice, 19, 653–669.

[27] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fondamenti di Fisica, Casa Editrice Ambrosiana.

[28] R. A. Serway, J. W. Jewett, Principles of Physics, Cengage Learning.

[29] U. Amaldi, L'Amaldi per i licei scientifici, Zanichelli.