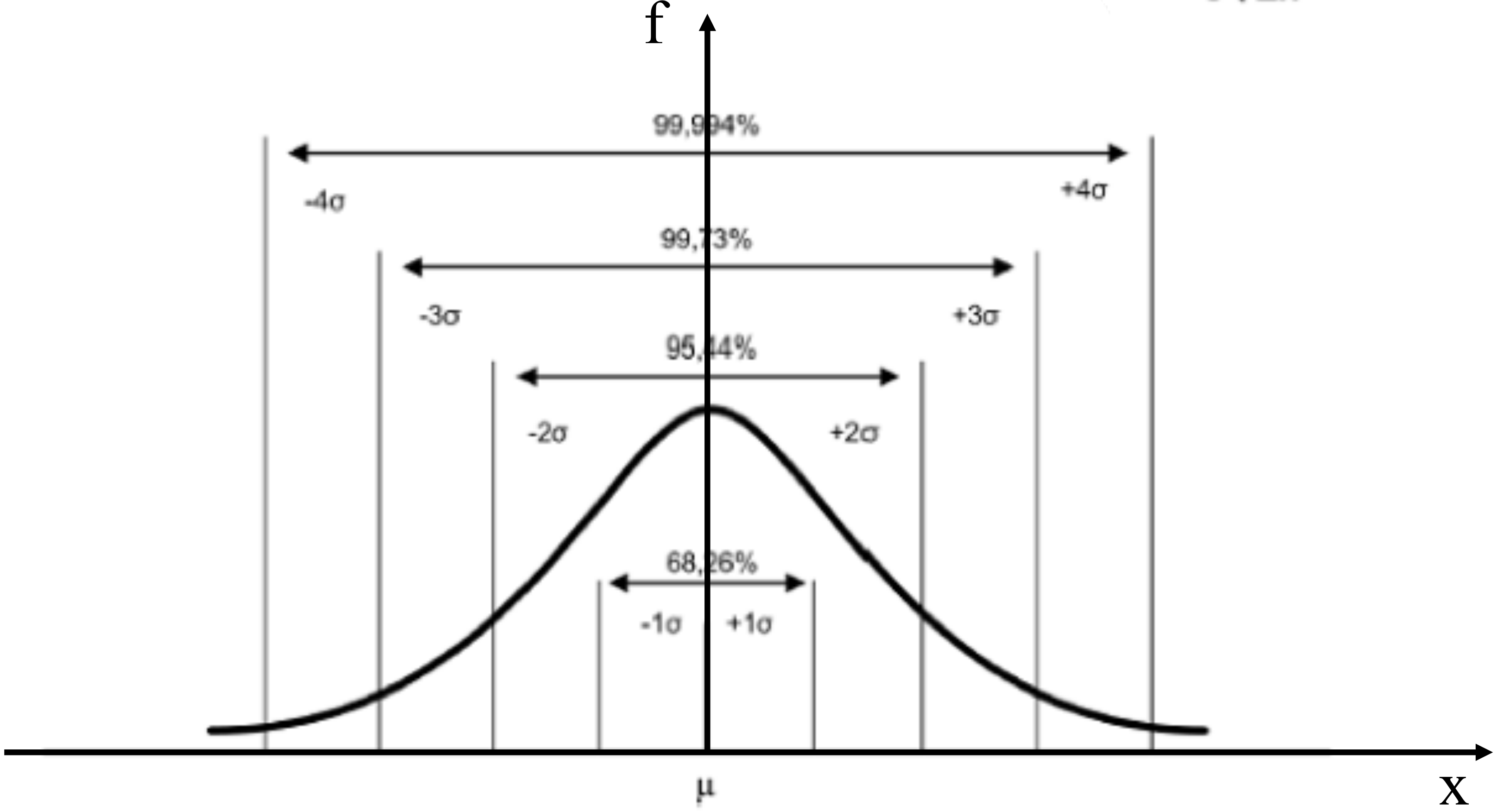
Errori e cifre significative

Incontro iniziale LAB2GO

La distribuzione gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$



tinyurl.com/LabCalcQuiz

Propagazione degli errori

- Misure dirette: la grandezza fisica viene misurata direttamente (ad es. Spessore di una lastrina). Per questo tipo di misure, la teoria dell'errore sviluppata nelle lezione precedenti é sufficiente per valutare gli errori di misura.
- Misure indirette: la grandezza fisica **non viene misurata direttamente**. Il suo valore viene determinato (mediante una relazione matematica nota dalla teoria) a partire dal valore di una o piú grandezze misurate . Ad esempio

  $v=s/t$ (misuro spazio e tempo e determino la velocitá)

  Poiché le grandezze misurate (nell'esempio t ed s) sono affette da errore, **la grandezza indirettamente (v) non potrá non essere affetta da errore!!** Si parla pertanto di **propagazione** dell'errore.

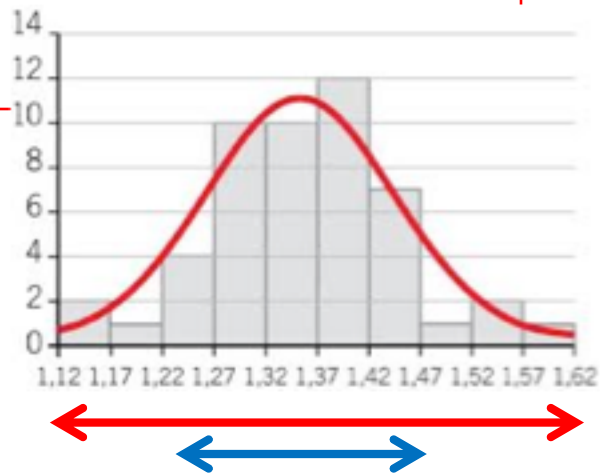
  Quale è l'errore sulla grandezza derivata?

  . Si presentano situazioni diverse a seconda che l'errore sulle grandezze misurate siano **massimi** o **statistici**.

Errore massimo e statistico

Errore massimo

Intervallo entro il quale sono "sicuro" di trovare ogni misura



Errore Statistico

Intervallo entro il quale ho una probabilita' del 68% di trovare una misura in caso di distribuzione gaussiana

Errore massimo - I

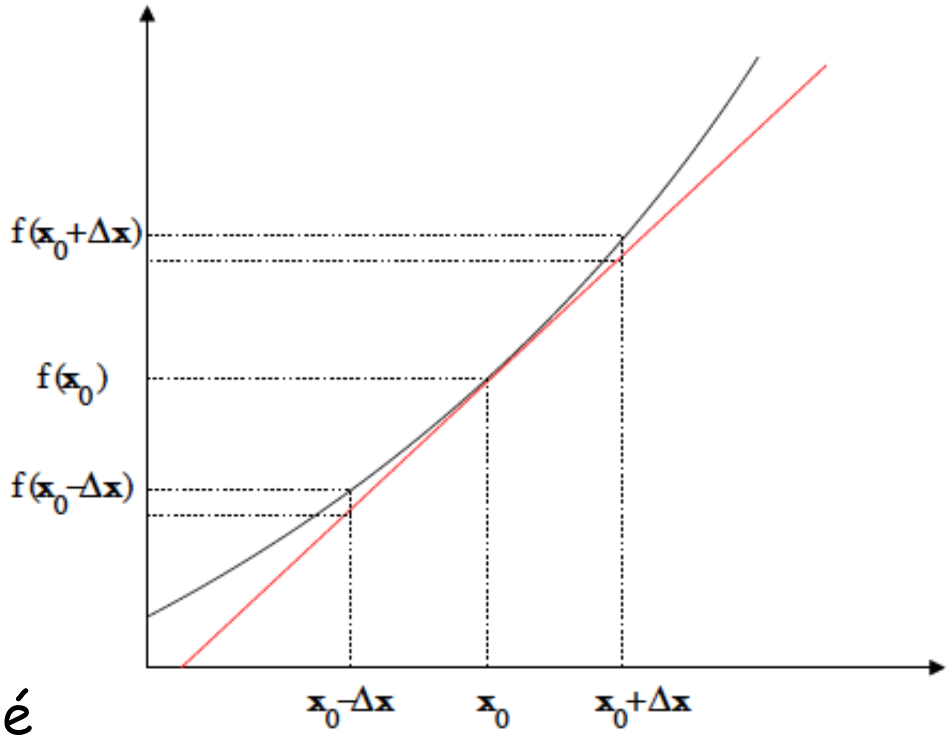
Misuro $x=x_0$ con errore Δx

e voglio determinare

$$y=f(x)$$

dove f é la funzione

(nota dalla teoria) che lega y a x.



l'errore Δy sulla grandezza derivata é

$$\Delta y = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2}$$

ESEMPIO:

$$y = a \cdot x^2$$

$$\Delta y = a \cdot 2x_0 \Delta x$$

Errore massimo - II

Estensione al caso di funzioni di piú variabili

- Quanto ora visto nel caso in cui la variabile y sia funzione di una sola variabile puo' essere esteso al caso in cui y é funzione di piú variabili (ad es. due).

$$y=f(x_1,x_2)$$

- In questo caso si considera la somma delle incertezze:

$$\Delta y = \frac{f(x_{1,0}+\Delta x_1, x_{2,0}) - f(x_{1,0}-\Delta x_1, x_{2,0})}{2} + \frac{f(x_{1,0}, x_{2,0}+\Delta x_2) - f(x_{1,0}, x_{2,0}-\Delta x_2)}{2}$$

ESEMPIO:

$$y = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2$$

$$\Delta y = a \cdot 2x_{1,0}\Delta x_1 + b \cdot \Delta x_2$$

Errore massimo - formulario

y	Δy
$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$	$\Delta y = \lvert a \rvert \cdot \Delta x_1 + \lvert b \rvert \cdot \Delta x_2$
$y = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$	$\frac{\Delta y}{y} = \lvert \alpha \rvert \frac{\Delta x_1}{x_1} + \lvert \beta \rvert \frac{\Delta x_2}{x_2}$
$y = a \cdot e^{k \cdot \Delta x_1}$	$\Delta y = \lvert a \rvert \cdot k \cdot e^{k \cdot \Delta x_1}$
$y = a \cdot \log(k \cdot x_1)$	$\frac{\Delta y}{y} = \lvert a \rvert \frac{\Delta x_1}{x_1}$

Estensioni ed esempi

y	Dy	Note
$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$	$\Delta \bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x_i}{N} = \Delta x$	L'errore sulla media, assumendo tutte le misure abbiano lo stesso errore Δx, non dipende da N (!!!)
$y = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} + b \cdot x_3$	$\Delta y = y \cdot \left(\lvert \alpha \rvert \frac{\Delta x_1}{x_1} + \lvert \beta \rvert \frac{\Delta x_2}{x_2} \right) + \lvert b \rvert \Delta x_3$	Applicazione in cascata delle formule sopra

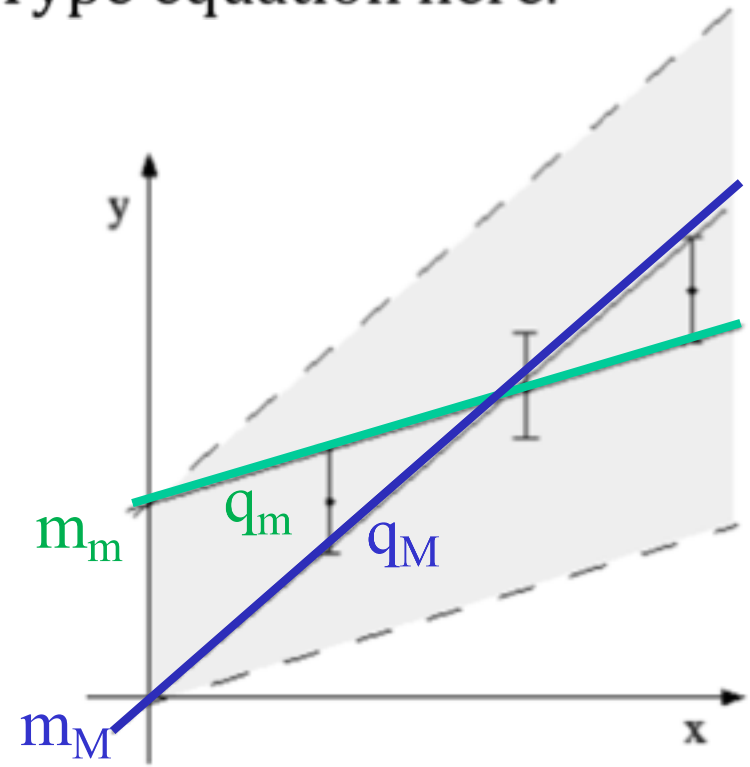
Errore Massimo- parametri retta

- L'errore massimo su pendenze ed intercette si ottiene considerando le rette di massima e minima pendenza

Type equation here.

$$m = \frac{m_m + m_M}{2} \mp \frac{|m_m - m_M|}{2}$$

$$q = \frac{q_m + q_M}{2} \mp \frac{|q_m - q_M|}{2}$$



Come riportare il risultato

1. Il numero di cifre decimali di una misura e del suo errore devono essere uguali

$\cancel{L = (10.2 \pm 0.05)\,\mathrm{m}}$ $\quad$ $L = (10.23 \pm 0.05)\,\mathrm{m}$

2. Come convenzione su quante cifre significative dell’errore prendere si usa:
   - Una cifra se la prima è >3

   $\cancel{L = (10.23 \pm 0.51)\,\mathrm{m}}$ $\quad$ $L = (10.2 \pm 0.5)\,\mathrm{m}$

   - Due cifre se la prima è <=3

   $L = (10.23 \pm 0.15)\,\mathrm{m}$

3. Quando la cifra meno significativa che si tiene è maggiore dell'unità si consiglia di cambiare unità di misura o di usare la notazione esponenziale

$\cancel{L = (10200 \pm 500)\,\mathrm{mm}}$ $\quad$ $L = (10.2 \pm 0.5)\,\mathrm{m}$ oppure $L = (102 \pm 5) \cdot 10^2\,\mathrm{mm}$

Errore statistico - I

- Come visto, nel caso di errori massimi, la propagazione dell'errore (nel caso di funzioni di piu' variabili) avviene nella maniera piu' pessimistica, cioe' supponendo di sbagliare in modo correlato (e peggiore possibile) le misure sulle diverse variabili.
- Chiaramente questa procedura porta ad una sovrastima dell'errore, il che va bene se ho che fare con errori massimi, ma non se ho a che fare con errori statistici.
- Per questi ultimi, occorre tenere presente che le misure sule diverse variabili x_i non danno risultati fra loro correlati (hp. Delle misure indipendenti)

- Consideriamo il caso di una funzione di due variabili: $y=f(x_1,x_2)$
- Sviluppiamo in serie di Taylor nell'intorno del valore x_0 trovato nella misura:

$$\delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{x_0} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\bigg|_{x_0} \delta x_2$$

Errore statistico - II

- Notiamo esplicitamente che:
  - Le derivate parziali sono calcolate nel punto x_0 e sono pertanto dei numeri reali .
  - Le quantita' δx_1 e δx_2 rappresentano gli errori che si commettono misurando x_1 ed x_2. Entrambi sono variabili gaussiane centrate ma non ridotte: hanno dunque valor medio teorico nullo e deviazioi standard teoriche rispettivamente pari a σ_1 e σ_2.
  - L'espressione precedente ci dice che l'errore δy e' somma di due variabili gaussiane moltiplicate per dei coefficienti numerici (le derivate parziali).

δy e' dunque che essa una variabile gaussiana e, per I teoremi sulla somma di variabili gaussiane e del loro prodotto per una costante la sua varianza e' pari a:

$$\sigma_y^2 = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_0} \right)^2 \sigma_{x_2}^2$$

Errore statistico - III

- Di qui, estraendo la radice, si ottiene l'espressione per la deviazione standard:

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_0}\right)^2 \sigma_{x_2}^2}$$

Generalizzazione al caso di N variabili

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_0}\right)^2 \sigma_{x_1}^2}$$

Caso particolare di una sola variabile

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}\right)^2 \sigma_x^2} = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}\right| \sigma_x$$

Errore statistico - IV

- Notiamo che nel caso di piu' variabili l'espressione della propagazione dell'errore statistico, fornisce, a parita' di errori sulle osservabili misurate, un errore sulla variabile y minore di quello che si ottiene con la propagazione dell'errore massimo (somma in quadratura invece di somma diretta).
- Cio' e' dovuto al fatto che nel derivare le regole di propagazione dell'errore statistico si e' esplicitamente tenuto conto che le misure delle diverse variabili sono scorrelate ed indipendenti, mentre per l'errore massimo si e' supposto che tali misure siano invece correlate nella maniera piu' pessimistica possibile.
- Per il caso di una sola variebile, le formule di propagazione dell'errore massimo e statistico coincidono.

Errore statistico- formulario

y	Δy
$y = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$	$\Delta y = \sqrt{a^2 \cdot (\Delta x_1)^2 + b^2 \cdot (\Delta x_2)^2}$
$y = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$	$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
$y = a \cdot e^{k \cdot \Delta x_1}$	$\Delta y = \lvert a \rvert \cdot k \cdot e^{k \cdot \Delta x_1}$
$y = a \cdot \log(k \cdot x_1)$	$\frac{\Delta y}{y} = \lvert a \rvert \frac{\Delta x_1}{x_1}$

Estensioni ed esempi

y	Dy	Note
$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$	$\Delta \bar{x} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$	L'errore sulla media, assumendo tutte le misure abbiano lo stesso errore Δx, descresce all'aumentare di N
$y = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} + b \cdot x_3$	$\Delta y = \sqrt{y^2 \left[\alpha^2 \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2\right] + b^2 \cdot (\Delta x_3)^2}$	Applicazione in cascata delle formule sopra