
ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

**Studio delle interazioni
delle WIMP
dell'alone galattico**

Relatore:
Prof.ssa Gabriella Sartorelli

Candidato:
Federica Agostini

Correlatore:
Dott. Marco Selvi

Sessione II Anno Accademico 2010-2011

Indice

1	Le WIMP	4
1.1	Cos'è la materia oscura	4
1.2	Prove dell'esistenza della MO	6
1.2.1	Velocità delle stelle nelle galassie a spirale	6
1.2.2	Moto delle galassie nei cluster	8
1.2.3	Nubi di gas tra le galassie	8
1.2.4	Lente gravitazionale	9
1.3	Candidati alla materia oscura: le WIMP	10
1.3.1	Materia oscura barionica	10
1.3.2	Materia oscura non barionica	11
1.4	Come si rivelano le WIMP	12
1.5	Rivelatore a doppia fase: Xe100	14
1.6	Calcolo del numero di eventi di scattering	16
2	Energia di rinculo	18
2.1	Problema a due corpi	18
2.2	Risultati	20
2.2.1	Energia di rinculo massima del nucleo bersaglio	20
2.2.2	Velocità minima delle WIMP	22
3	Distribuzione galattica delle velocità	25
3.1	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann	25
3.2	Risultati	27

<i>INDICE</i>	2
3.2.1 Confronto tra le velocità nel sistema del Sole e della galassia	28
3.2.2 Velocità nel sistema del laboratorio	31
4 Fattore di forma	35
4.1 Scattering elastico WIMP-nucleo	36
4.2 Risultati	38
5 Rate di eventi	41
5.1 Rate differenziale e totale	42
5.2 Risultati	44
5.2.1 Rate differenziale	44
5.2.2 Rate totale	50
5.2.3 Confronto dei risultati	52
6 Conclusioni	56

Introduzione

Le WIMP, acronimo di “Weakly Interacting Massive Particle”, sono uno dei possibili candidati come costituenti della materia oscura. Gli esperimenti dedicati alla loro rivelazione sono tutt’ora in corso, il più importante in Italia è Xe100 e il futuro Xe1T ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS).

Alcune caratteristiche specifiche delle WIMP, quali massa e velocità, non sono ancora completamente note, quindi lo scopo di questa tesi è di studiarle per poi fare una previsione sul rate totale e differenziale di eventi attesi. Il problema sperimentale nella rilevazione delle WIMP è che la cinematica predice energie di rinculo dei nuclei bersaglio molto basse. Queste inoltre si confondono facilmente con le energie di rinculo dovute al rumore di fondo. Quindi i risultati della tesi potrebbero aiutare a fare luce sulle caratteristiche degli eventi dovuti alle WIMP.

Ci si attende che il numero di eventi sia piccolissimo, poichè la sezione d’urto dell’interazione WIMP-nucleo bersaglio del rivelatore è molto bassa. Negli ultimi esperimenti si è aumentata la sensibilità e si sono escluse sezioni d’urto maggiori di $\sigma_{SI}^p = 10^{-9}$ pb (questa in realtà è la sezione d’urto WIMP-protone che non considera l’interazione tra spin), valore che verrà utilizzato per tutta la tesi.

Capitolo 1

Le WIMP

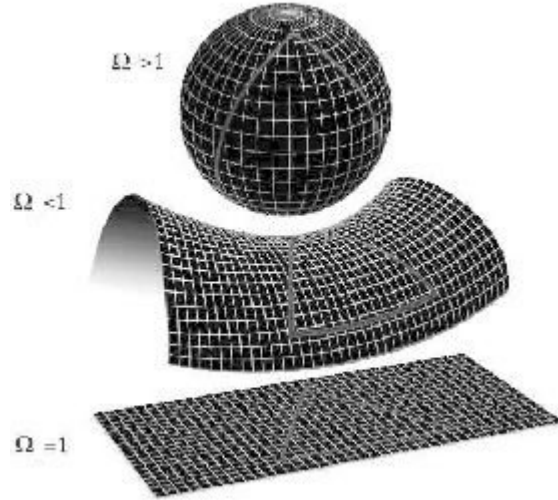
1.1 Cos'è la materia oscura

La materia oscura è argomento delle moderne teorie sviluppate nell'ambito dell'astronomia, della cosmologia e della fisica delle particelle. Essa si definisce come materia che non emette radiazioni elettromagnetiche, tra le quali ovviamente la luce visibile. Per rivelarla si devono dunque escludere tutti gli effetti dovuti all'interazione elettromagnetica, mentre evidenti sono quelli gravitazionali.

Secondo la teoria della Relatività generale sviluppata da Einstein [1], la dinamica dell'Universo varia a seconda del comportamento di una costante detta parametro di densità $\Omega = \frac{\rho}{\rho_C}$, dove ρ indica la densità dell'Universo e $\rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ è una costante chiamata densità critica (H_0 è la costante di Hubble e G è la costante di gravitazione universale).

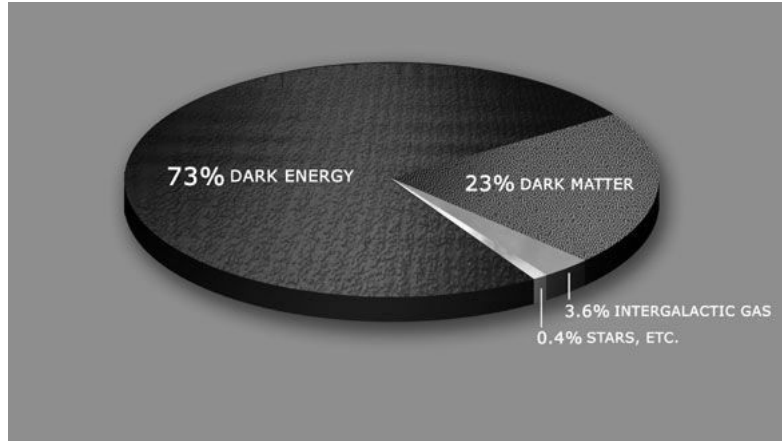
1. se $\Omega > 1$ l'Universo si dice chiuso (geometria sferica) ed è destinato ad un collasso gravitazionale inverso al Big Bang, detto Big Crunch;
2. se $\Omega = 1$ l'Universo si dice piatto (geometria euclidea) ed è destinato ad una continua espansione;
3. se $\Omega < 1$ l'Universo si dice aperto (geometria iperbolica) ed è destinato ad una continua espansione.

Figura 1.1: Curvatura dello spazio-tempo a seconda del valore del parametro di densità Ω .



In seguito ad esperimenti sulle fluttuazioni della radiazione cosmica di fondo (CMB, Cosmic Microwave Background), emessa poco dopo il Big Bang, il modello più accreditato prevede che l'Universo sia piatto, di conseguenza $\Omega = 1$. Quindi la densità dell'Universo deve risultare equivalente alla densità critica, ma misurando il contributo dato dalla materia luminosa (barionica) si nota che essa costituisce solo l'1% della densità critica. I risultati di esperimenti sulle fluttuazioni della CMB e sulle supernove, mostrano che il restante 99% si suddivide tra materia barionica invisibile (materia oscura barionica, il 3%), materia oscura non barionica (il 23%) ed energia oscura (il 73%) [4].

Figura 1.2: Percentuale della materia che compone l'Universo. La suddivisione è stata fatta in seguito agli esperimenti sulla radiazione cosmica di fondo.



Il termine "barionico" viene introdotto nel Modello Standard per indicare particelle costituite da 3 quark (con opportuna combinazione di colori nella teoria della QCD); la materia barionica è quindi la materia ordinaria [10].

1.2 Prove dell'esistenza della MO

Alcuni comportamenti anomali nella cosmologia portano direttamente all'ipotesi dell'esistenza della materia oscura. Ciò si verifica quando gli effetti gravitazionali non sono riconducibili ad oggetti luminosi.

1.2.1 Velocità delle stelle nelle galassie a spirale

Le galassie a spirale sono costituite da un ammasso di stelle di massa M che formano il nucleo della galassia e due bracci disposti a spirale, attorno al nucleo, generati anch'essi da stelle che si diradano lontane dal nucleo. Le stelle nei bracci della galassia, di massa m , ruotano tutte attorno al nucleo e la velocità di rotazione ha comportamento analogo alla velocità dei pianeti attorno al Sole. Per questi valgono le leggi di Keplero:

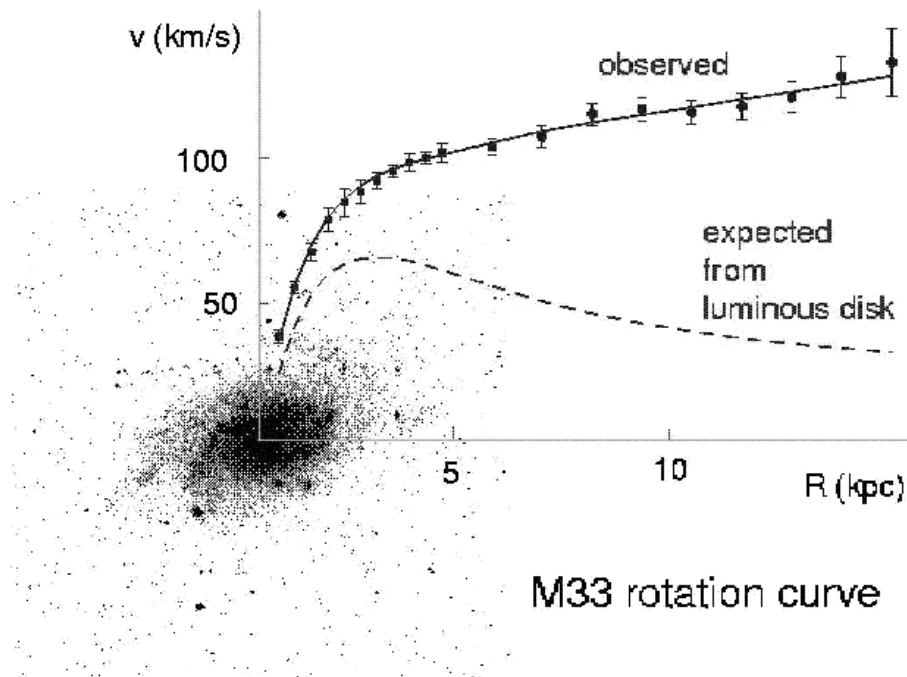
$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

da cui si ricava l'andamento della velocità:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (1.1)$$

In figura 1.3 è mostrato un grafico della velocità delle stelle in funzione della distanza dal nucleo della galassia. L'andamento atteso della velocità, supponendo che la massa sia costante in ogni punto, è in disaccordo con i dati sperimentali, secondo i quali, invece, la massa cresce con la distanza.

Figura 1.3: Velocità delle stelle nei bracci di una galassia a spirale in funzione della distanza dal nucleo della galassia. La linea tratteggiata indica l'andamento atteso, formula (1.1), mentre quella continua l'andamento sperimentale.



Siccome, però, la materia luminosa diventa visibilmente più rada all'aumentare della distanza, è immediato ipotizzare che esista una quantità di materia che non si vede, ma di cui si subiscono gli effetti gravitazionali.

1.2.2 Moto delle galassie nei cluster

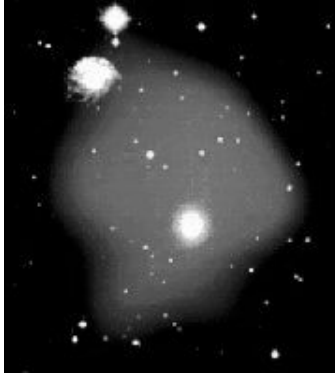
I cluster di galassie sono ammassi di galassie che ruotano attorno ad un centro con una velocità inferiore alla velocità di fuga del cluster; se la velocità di rotazione fosse maggiore della velocità di fuga le galassie si allontanerebbero le une dalle altre e non si potrebbe più parlare di ammassi.

Negli anni '30 Zwicky, studiando l'ammasso della Chioma di Berenice, si accorse che la velocità delle galassie era molto superiore a quella attesa, calcolata tramite i valori della massa visibile. Non era assolutamente spiegabile come un sistema gravitazionale legato potesse muoversi ad una velocità superiore a quella di fuga. L'unica risposta a questo problema era introdurre qualcosa che producesse un forte effetto gravitazionale tale da tenere assieme le galassie di un ammasso. Questo "qualcosa" venne chiamato massa mancante e coincide con l'ipotesi più recente della materia oscura.

1.2.3 Nubi di gas tra le galassie

Nella periferia delle galassie o tra le galassie degli ammassi, dove la luminosità delle stelle è trascurabile, si possono osservare gas "caldi", che emettono cioè raggi X, confinati in una regione limitata di spazio.

Figura 1.4: Nube di gas caldo confinato in una galassia. Esso viene rivelato tramite i raggi X che emette.

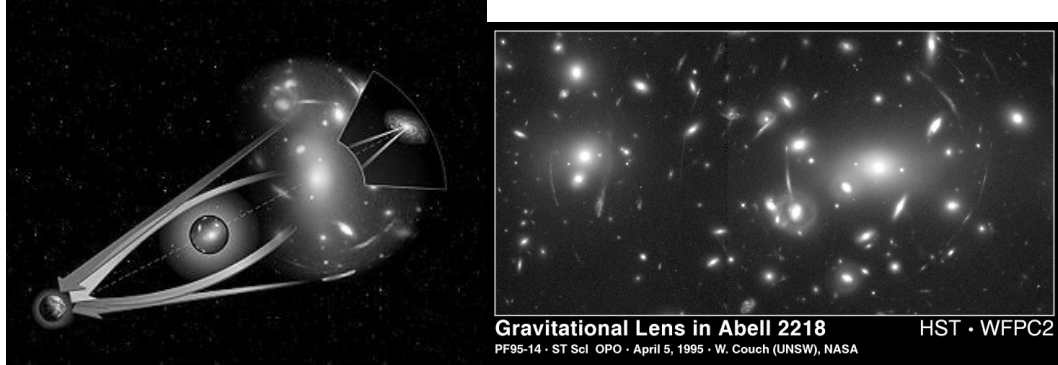


La sola massa visibile non è sufficiente a mantenere un gas confinato, infatti ci si aspetterebbe che si disperdesse. Il paradosso viene però superato se si introduce l'ipotesi dell'esistenza della materia oscura, che funge da sorgente gravitazionale e riscalda il gas.

1.2.4 Lente gravitazionale

L'effetto della lente gravitazionale è dovuto ad un grosso cluster di galassie che fa curvare la luce che gli passa vicino. Come conseguenza la luce delle galassie retrostanti viene deflessa; dalla misura dell'effetto di tale distorsione si risale alla massa del cluster di galassie.

Figura 1.5: Lente gravitazionale: la luce che passa vicino ad una sorgente gravitazionale viene deflessa e gli oggetti che gli si trovano dietro vengono visti distorti.



I risultati sperimentali portano ad un valore della massa del cluster nettamente superiore alla massa visibile. Per questo motivo viene introdotta l'esistenza di una massa invisibile, o materia oscura, che contribuisce all'effetto gravitazionale.

In conclusione, date le evidenze sperimentali che sfruttano gli effetti gravitazionali, si ipotizza di poter trovare materia oscura nell'Universo, distribuita in aloni attorno al nucleo delle galassie e nello spazio tra le galassie dei cluster.

1.3 Candidati alla materia oscura: le WIMP

Mentre è abbastanza evidente l'esistenza della materia oscura, la sua natura è tutt'altro che nota. In seguito ai contributi ad Ω di materia di vario tipo, le teorie più diffuse confermano che la materia oscura sia suddivisa tra barionica e non barionica.

1.3.1 Materia oscura barionica

I candidati alla materia oscura barionica sono i MACHO (Massive Compact Halo Objects), cioè oggetti molto massivi che possono essere rilevati per mez-

zo del fenomeno della lente gravitazionale, osservando l'aumento di intensità luminosa delle stelle che gli si trovano dietro. La massa di materia oscura stimata con questo metodo, però, è di gran lunga inferiore a quella attesa, dunque si può dire che la materia barionica costituisca solo una minima parte della materia oscura nell'Universo (come già detto, un 3%).

1.3.2 Materia oscura non barionica

La materia oscura non barionica si può a sua volta suddividere in calda e fredda a seconda della formazione dell'Universo subito dopo il Big Bang. In realtà il contributo alla costante Ω è dato da entrambi i tipi di materia, ma in prevalenza la materia oscura è fredda.

a) Materia oscura calda:

è materia relativistica. Essa comporta che inizialmente vi fossero ammassi molto voluminosi, che si sono poi sgretolati per formare la struttura attuale dell'Universo.

I possibili candidati alla materia oscura calda sono i neutrini fossili, che hanno una massa molto piccola (al massimo dell'ordine dell'eV) e si muovono quasi alla velocità della luce. Si ipotizza che si siano originati subito dopo il Big Bang, in seguito a reazioni nucleari provenienti dalle stelle. Ci si aspetta di trovarli tra le galassie o nei cluster di galassie.

b) Materia oscura fredda:

è materia non relativistica. Essa comporta che inizialmente vi fossero piccole galassie e ammassi di stelle che si sono raggruppate assieme per formare galassie più voluminose, a loro volta unite per dare origine ad ammassi più grandi fino alla struttura attuale dell'Universo.

A seconda della massa ipotizzabile dagli effetti gravitazionali ci sono due candidati alla materia oscura fredda:

Assioni La massa prevista per queste particelle è dell'ordine di $10^{-3}/10^{-5}$ eV. Gli assioni sono un modello teorico introdotto per risolvere il problema

della violazione della CP nelle interazioni forti. Essi devono avere spin zero e parità -1 (sono pseudoscalari), sono neutri e stabili, inoltre in presenza di un campo elettromagnetico si trasformano in fotoni. Quest'ultimo aspetto è quello su cui si basano gli esperimenti per la rivelazione di assioni, ma hanno dato tutti esiti negativi. Si ipotizza che siano stati prodotti subito dopo il Big Bang, oppure si siano trasformati dai fotoni (che è il processo inverso a quello della loro rivelazione).

WIMP La massa prevista per queste particelle va da qualche GeV a 10 TeV. L'importanza delle WIMP, ed il motivo per cui questa tesi è incentrata su di esse, è che si ipotizza che diano il maggiore contributo alla materia oscura. WIMP è l'acronimo di Weakly Interactive Massive Particle, quindi sono delle particelle massive, neutre, che interagiscono debolmente con la materia. Esse però non vengono studiate nel Modello Standard delle interazioni deboli, infatti sono particelle Supersimmetriche. Si ipotizza, come gli altri costituenti della materia oscura, che anche le WIMP si siano originate subito dopo il Big Bang e si trovino all'interno delle galassie. Un possibile candidato alle WIMP è il neutralino, in quanto è la più leggera particella Supersimmetrica.

1.4 Come si rivelano le WIMP

Siccome le WIMP sono le maggiori costituenti della materia oscura, sono loro la causa dell'andamento della velocità delle stelle attorno ai nuclei delle galassie a spirale. Per questo motivo è corretto supporre che si trovino anche nei bracci delle galassie a spirale. I metodi di rivelazione delle WIMP si basano proprio su quelle particelle di materia oscura che sono rimaste intrappolate nella Via Lattea e quindi sono distribuite attorno alla Terra, dal momento che il Sistema Solare si colloca in un braccio di questa galassia a spirale.

Principalmente i modi per rivelare le WIMP sono due ed entrambi sfruttano le particelle che sono rimaste intrappolate gravitazionalmente nella Via Lattea.

1. Metodo indiretto: si rivelano i prodotti delle annichilazioni con le antiparticelle di WIMP, cioè i neutrini. L'effetto gravitazionale contribuisce ad aumentare la densità di WIMP attorno alla Terra e dunque la probabilità di annichilazione. Bisogna però prestare attenzione a non confondere i neutrini in questione con quelli estranei al fenomeno. Per questo motivo gli esperimenti che sfruttano metodi indiretti non hanno fornito risultati certi.

Siccome il metodo indiretto non è quello di cui si parlerà nel resto della tesi, l'argomento non verrà ulteriormente approfondito.

2. Metodo diretto: le WIMP che hanno velocità inferiore alla velocità di fuga dalla galassia rimangono intrappolate e hanno una certa probabilità di urtare dei nuclei bersaglio, dei quali si rivela l'energia di rinculo.

Questo metodo è da comprendere nei dettagli perchè è il filo conduttore di tutti i parametri che verranno calcolati nella tesi.

Se i nuclei bersaglio subiscono un rinculo che non è attribuibile a fenomeni esterni, si può affermare di essere in presenza delle WIMP. Se si effettua ripetutamente l'esperimento con gli stessi parametri, cambiando solo il tipo di bersaglio, ci si attenderà una diversa distribuzione delle energie di rinculo e questa può essere un'ulteriore prova dell'evidenza delle WIMP (la dipendenza dal tipo di bersaglio verrà sottolineata più avanti nella tesi, dove si confronteranno in parallelo i risultati ottenuti).

Si devono però considerare alcuni problemi del metodo diretto: le energie in gioco sono molto basse, dell'ordine del keV e quindi difficili da rivelare, il numero di eventi è piccolo (come verrà spiegato dettagliatamente più avanti), inoltre è facile confondersi con i rinculi dei nuclei dovuti ai fenomeni attorno al rivelatore, chiamati rumore di fondo. Il problema del rumore di fondo dei raggi cosmici si può limitare ponendo i rivelatori sotto una montagna o sott'acqua, in modo da sfruttarne l'effetto schermante. Un esempio italiano sono i Laboratori Nazionali del Gran Sasso (LNGS), i cui rivelatori sono infatti posti sotto la montagna abruzzese del Gran Sasso. Il fondo però è costituito anche dagli elementi radioattivi attorno ed internamente al rivelatore; occorre quindi schermare ulteriormente il rivelatore e utilizzare come nucleo bersaglio un materiale molto puro. Di nuovo, nell'esperimento

per la ricerca della materia oscura condotto ai LNGS, come bersaglio viene utilizzato un gas nobile, lo xeno, che è autoschermante.

I rivelatori possono essere di vario tipo: a stato solido, a scintillazione, criogenici, ibridi. Possono anche utilizzare gas nobili a doppia fase, come nell'esperimento appena menzionato di Xe100-Xe1T (100 indica i 100 kg di nucleo bersaglio di xeno e 1T indica una tonnellata).

Ai fini della tesi è importante sapere che si possono utilizzare diversi tipi di nuclei bersaglio, i cui spettri energetici sono il riflesso di una particella incidente che deve essere rivelata. Cambiare la natura del bersaglio permette di avere una conferma dell'esistenza delle WIMP, sebbene solo alcuni nuclei si prestino bene per questo scopo.

1.5 Rivelatore a doppia fase: Xe100

I risultati della tesi utilizzano spesso come parametri quelli dell'esperimento Xe100 dei LNGS, perciò è opportuno fare una breve descrizione del rivelatore [12]. Esso sfrutta l'interazione di una WIMP con il bersaglio del rivelatore, cioè lo xeno, che oltre ad effettuare una funzione di autoschermaggio contro il rumore di fondo è molto puro, quindi non ha decadimenti al suo interno. La massa totale del bersaglio è 100 kg, suddivisi tra quella in fase liquida (LXe), che è la più abbondante, ed in fase gassosa (GXe), in modo che lo scattering avvenga contro il materiale allo stato liquido. Il funzionamento della camera contenente lo xeno (TPC, Time Projection Chamber) è schematicamente descritto in figura 1.6: le WIMP che urtano elasticamente un nucleo bersaglio gli conferiscono un rinculo che ionizza gli atomi circostanti. Gli elettroni che si ricombinano immediatamente emettono un segnale luminoso S1, mentre quelli liberi migrano sottoposti ad un campo elettrico lungo la direzione verticale, internamente allo xeno in fase liquida. In prossimità dell'interfaccia tra lo xeno allo stato liquido e gassoso, un campo elettrico più intenso permette l'emissione di un secondo segnale S2 dovuto allo scattering di elettroni sufficientemente energetici contro i nuclei bersaglio. Entrambi i fasci luminosi vengono intensificati da opportuni fotomoltiplicatori e la lunghezza d'onda rilevata è 178 nm, tipica dell'ultravioletto.

neutroni, in quanto particelle, si comportano esattamente come le WIMP. Il rivelatore è dunque opportunamente schermato contro i neutroni. Un'altra qualità di Xe100 è che risulta possibile localizzare le tre coordinate del punto in cui avviene l'interazione: z è proporzionale al tempo τ_{drift} che intercorre tra S1 ed S2, mentre x e y sono individuate dai punti in cui il segnale S1 è più intenso.

1.6 Calcolo del numero di eventi di scattering

Un contributo alla rilevazione delle WIMP può essere dato dal calcolo del numero di eventi di scattering delle WIMP contro il nucleo bersaglio del rivelatore. Se le previsioni circa la massa delle WIMP m_χ , la loro densità ρ_0 , la velocità \vec{v} rispetto al sistema galattico, la velocità di fuga v_{fuga} dalla galassia, la sezione d'urto dell'interazione σ_{sperim}^p con relative approssimazioni (cioè il fattore di forma) risultano pressochè corrette, è possibile fare una stima degli eventi attesi e confrontarli con quelli che sperimentalmente sembrano dovuti alle WIMP. Lo scopo della tesi è di derivare la formula del rate di eventi in funzione dell'energia di rinculo del nucleo, sviluppando considerazioni sui risultati ottenuti.

Il rate differenziale di eventi, che sarà chiarito meglio nel Capitolo 5, risulta:

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_0 \sigma_{teor}^p}{2\mu_p^2 m_\chi} A^2 F(q)^2 \int_{v_{min}}^{v_{fuga}} \frac{\rho(\vec{v} + \vec{v}_{Sole})}{v} d\vec{v}$$

Per arrivare a questa equazione bisogna come prima cosa calcolare l'energia di rinculo massima E_R del nucleo, che è la grandezza che viene sperimentalmente determinata dal rivelatore e, strettamente connessa, la velocità minima v_{min} della WIMP incidente, che compare come limite inferiore dell'integrale. Successivamente bisogna valutare la distribuzione di velocità più simile a quella tipica della WIMP, che secondo diversi autori è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann $\rho(\vec{v} + \vec{v}_{Sole})$. Inoltre, poichè il processo di scattering non è quello di Rutherford, ma è sperimentale, la sezione d'urto

WIMP-protone σ_{teor}^p avrà bisogno di una correzione, ovvero il quadrato del fattore di forma $F(q)^2$.

I parametri riguardanti le WIMP, che non sono stati ancora menzionati sono il numero di massa del nucleo bersaglio A , la massa ridotta del sistema WIMP-protone $\mu_p = \frac{m_p \cdot m_\chi}{m_p + m_\chi}$ e la massa del protone del nucleo bersaglio m_p .

Nei capitoli che seguono verranno discussi i vari elementi che contribuiscono al rate di eventi e la formula finale.

Capitolo 2

Energia di rinculo

L'energia di rinculo del nucleo bersaglio, unico parametro che permette la rivelazione delle WIMP con metodi diretti, è generalmente molto bassa. La sua dipendenza dalla massa e dalla velocità della WIMP è espressa nella formula:

$$E_R = \frac{\mu_N^2 v^2 (1 - \cos \theta')}{m_N} \quad (2.1)$$

dove v è la velocità della WIMP nel sistema di riferimento del laboratorio, θ' è l'angolo di scattering nel sistema del centro di massa, $\mu_N = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N}$ è la massa ridotta del sistema WIMP-nucleo, m_N è la massa del nucleo bersaglio e m_χ è la massa della WIMP (χ è il simbolo che indica la WIMP).

2.1 Problema a due corpi

Per ricavare la formula (2.1) bisogna risolvere il problema a due corpi, che consiste nel considerare come riferimento il sistema del centro di massa, in cui la massa è quella ridotta μ_N , e risolvere le equazioni del moto [13]. Ai fini della tesi, però, ci si potrà già fermare una volta trovate le velocità.

Con buona approssimazione la velocità del nucleo bersaglio prima dell'urto si può considerare nulla e quindi l'unico contributo alla velocità del centro di massa v_{CM} è dato dalla velocità v delle WIMP nel sistema del lab-

oratorio. Il centro di massa si muove lungo la congiungente WIMP-nucleo, che per semplicità si pone sull'asse x , e la velocità si ottiene come media pesata delle velocità dei due corpi, usando come peso la massa:

$$v_{CM} = \frac{m_\chi}{m_\chi + m_N} v$$

Come già detto precedentemente, le WIMP non sono particelle relativistiche, perciò, per determinare la velocità w della WIMP incidente nel sistema del centro di massa, si possono applicare le trasformazioni di Galileo:

$$w = v - v_{CM} = \frac{m_N}{m_\chi + m_N} v$$

Siccome i fenomeni considerati sono solo gli urti elastici, si conserva la quantità di moto e di conseguenza nel sistema del centro di massa la velocità del nucleo e della WIMP dopo l'urto sono rispettivamente uguali, nello stesso riferimento, alla velocità del nucleo e della WIMP prima dell'urto (che è appena stata determinata). La velocità del nucleo w_N nel sistema del centro di massa, prima dell'urto, si ricava dalla conservazione della quantità di moto totale:

$$p_\chi^{CM} + p_N^{CM} = 0$$

e quindi

$$w_N = -\frac{m_\chi}{m_N} w$$

A questo punto si possono applicare le trasformazioni di Galileo inverse per trovare le velocità del nucleo v_{Nx} e v_{Ny} dopo l'urto nel sistema del laboratorio, lungo gli assi che individuano il piano in cui avviene la diffusione, ricordando che θ' è l'angolo di diffusione nel centro di massa:

$$v_{Nx} = w'_{Nx} + v_{CMx} = w_N \cos \theta' + v_{CM} = \frac{\mu_N}{m_N} v (1 - \cos \theta')$$

$$v_{Ny} = w'_{Ny} + v_{CMy} = w_N \sin \theta' = \frac{\mu_N}{m_N} v \sin \theta'$$

Dalla formula classica dell'energia cinetica, si ricava l'energia di rinculo

del nucleo:

$$E_R = \frac{1}{2}m_N(v_{Nx}^2 + v_{Ny}^2) = \frac{1}{2} \frac{\mu_N^2 v^2}{m_N} [(1 - \cos \theta')^2 + \sin^2 \theta'] = \frac{\mu_N^2 v^2 (1 - \cos \theta')}{m_N}$$

che corrisponde proprio alla relazione (2.1).

2.2 Risultati

Tutti i grafici riportati in questo e nei prossimi capitoli sono stati creati dall'autrice della tesi per mezzo di un software chiamato "ROOT" [14], che utilizza una sintassi tipica del C++.

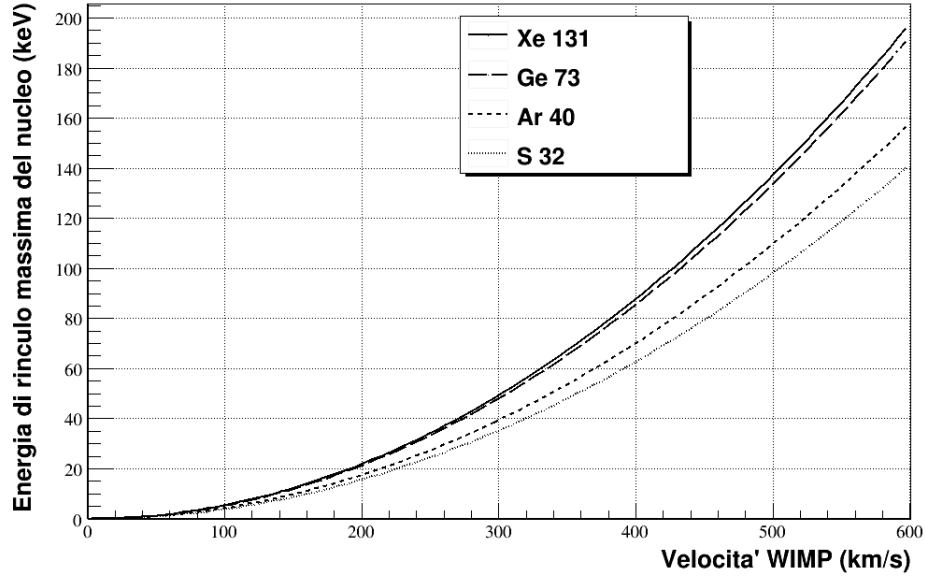
2.2.1 Energia di rinculo massima del nucleo bersaglio

Conoscendo la massa della WIMP e del nucleo si può applicare la formula (2.1) per determinare lo spettro delle energie di rinculo del bersaglio in funzione della velocità delle WIMP incidenti.

Nei grafici di questa sezione viene rappresentato lo spettro delle energie di rinculo massime. Da qui in poi quando si parlerà di energia si sottointenderà sempre quella massima. L'energia di rinculo massima si ha quando l'angolo di scattering θ' della particella incidente nel centro di massa forma 180° con la direzione iniziale del moto; si preferisce utilizzare questo valore per l'angolo poichè, come si vedrà, già le energie massime sono molto basse. Si eviterà di effettuare il grafico dell'energia di rinculo anche in funzione dell'angolo di scattering in quanto risulterebbe una semplice senoide, come ci si aspetta dalla formula (2.1).

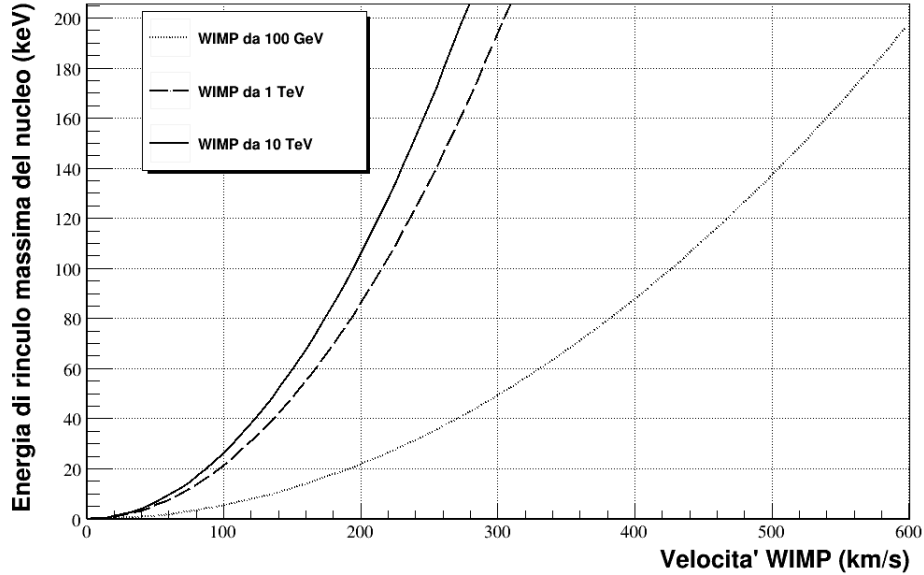
In figura 2.1 vengono confrontate le energie di rinculo di 4 nuclei bersaglio differenti: xeno, germanio, argon e zolfo. Questi potrebbero infatti appartenere a 4 diversi esperimenti finalizzati alla rivelazione delle WIMP. Il valore esatto della massa del bersaglio dell'esperimento è dato dalla media pesata degli isotopi presenti in natura [15]. La massa della WIMP è fissata a 100 GeV.

Figura 2.1: Confronto delle energie di rinculo massime di 4 nuclei bersaglio in funzione della velocità di una WIMP di massa $m_\chi=100$ GeV. Il grafico si estende fino alla velocità di fuga della WIMP dalla galassia.



In figura 2.2, invece, si utilizza come nucleo bersaglio solo lo xeno (per conformità con gli esperimenti in atto ai LNGS) e si confrontano 3 andamenti attesi dell'energia di rinculo per WIMP con 3 valori diversi di massa, che aumenta ogni volta di un fattore 10.

Figura 2.2: Confronto delle energie di rinculo massime di un nucleo di xeno in funzione della velocità di 3 WIMP con masse diverse. Il grafico si estende fino alla velocità di fuga della WIMP dalla galassia.



L'intervallo delle velocità delle WIMP entro cui si sviluppano i grafici è 0-600 km/s; il limite superiore è dato circa dalla velocità di fuga della WIMP dalla galassia [16]. Si nota effettivamente che in questo range di velocità l'energia di rinculo è molto bassa, dunque servono strumenti sofisticati per poterla rivelare.

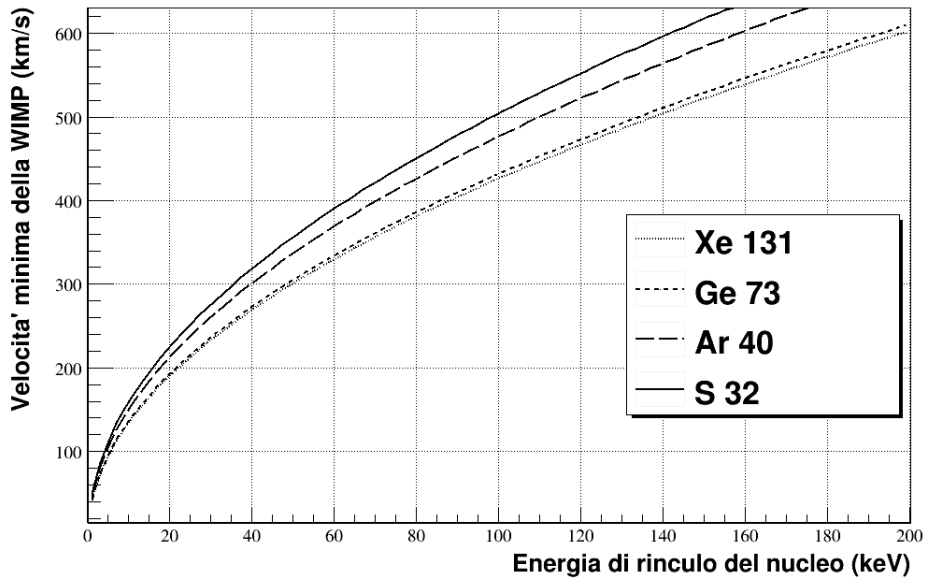
2.2.2 Velocità minima delle WIMP

Sviluppando la (2.1) e ricordando che la massima energia di rinculo si ha per un angolo di scattering nel centro di massa pari a 180° , si determina una semplice formula per la velocità minima delle WIMP incidenti:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{m_N E_R}{2\mu_N^2}} \quad (2.2)$$

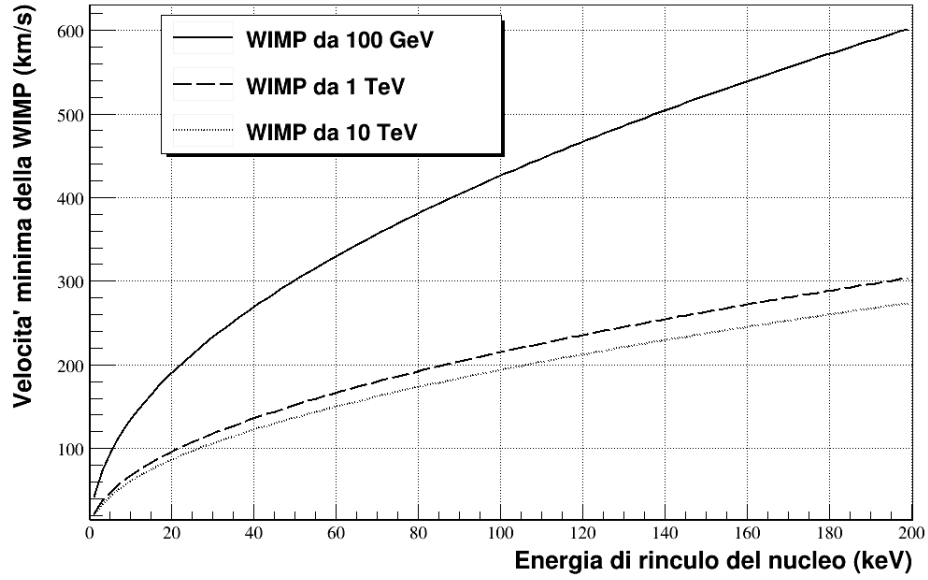
In figura 2.3 viene applicata la formula (2.2) per confrontare gli andamenti della velocità minima delle WIMP incidenti relativa a 4 nuclei bersaglio, cioè quelli di cui è stato fatto il grafico in figura 2.1. Valgono le stesse considerazioni sulle abbondanze isotopiche. Si è utilizzato, per la massa delle WIMP, lo stesso valore di 100 GeV.

Figura 2.3: Confronto delle velocità minime di una WIMP di massa $m_\chi=100$ GeV incidente su 4 bersagli di diverso tipo, in funzione della loro energia di rinculo.



Infine, in figura 2.4 vengono confrontate le velocità di WIMP incidenti con masse di 100 GeV, 1 TeV e 10 TeV, mantenendo come bersaglio lo xeno.

Figura 2.4: Confronto tra le velocità minime delle WIMP con 3 masse diverse incidenti su un bersaglio di xeno, in funzione della sua energia di rinculo.



Ovviamente i grafici della velocità minima delle WIMP saranno come quelli dell'energia di rinculo massima del bersaglio, ma ribaltati rispetto alla bisettrice del primo quadrante. In questo modo dovrebbe risultare più chiaro il valore numerico delle grandezze importanti da tenere in considerazione per il resto della tesi.

Capitolo 3

Distribuzione galattica delle velocità

Negli studi sulle WIMP particolarmente rilevante è la velocità, che non assume un valore costante, poichè dipende dalla massa e dalla temperatura delle particelle. Bisogna quindi trovare una buona distribuzione di probabilità delle velocità. Un modello su cui molti autori concordano è la distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann [18]:

$$\rho(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2KT}} \quad (3.1)$$

E' da sottolineare che il sistema in cui si collocano gli apparati è il laboratorio, mentre la velocità delle WIMP viene calcolata rispetto al riferimento della galassia. Il laboratorio si muove approssimativamente con la velocità del Sistema Solare attorno alla galassia, quindi bisognerà applicare le trasformazioni classiche di Galileo per poter utilizzare la formula (3.1).

3.1 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

La distribuzione di probabilità canonica $\vec{\rho}_c(\vec{Z})$ è una probabilità di un gas all'equilibrio termico nello spazio delle fasi. $\vec{Z} = (\vec{p}, \vec{r})$ indica un punto nello spazio delle fasi. Un sistema si dice canonico se i sottosistemi che lo

compongono, cioè la singola particella del gas, non si scambiano materia, ma solo calore, attraverso gli urti.

La distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann è un esempio di distribuzione canonica che soddisfa il limite semiclassico. Per limite semiclassico si intende il limite del continuo e la condizione di non degenerazione. Si ha limite del continuo se gli scambi energetici discreti sono molto piccoli, precisamente $\epsilon_2 - \epsilon_1 \ll KT$, dove ϵ_n è l'energia della particella allo stato n-esimo, K è la costante di Boltzmann che vale $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K e T è la temperatura assoluta. Invece il limite di non degenerazione è realizzato quando il gas è rarefatto, ovvero $\frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi mKT)^{3/2}} \ll 1$, dove m è la massa di ogni particella, $\frac{N}{V}$ è la densità di particelle e h è la costante di Plank, che vale $6.626 \cdot 10^{-34}$ J·s.

Secondo il modello, quindi, le WIMP seguono la distribuzione canonica nel limite del continuo. La probabilità di trovare un gas di N WIMP attorno al punto (\vec{p}, \vec{r}) nello spazio delle fasi è:

$$\rho_c(\vec{Z}) = \prod_{j=1}^N \frac{e^{-\frac{\vec{p}_j^2}{2mKT}}}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} V}$$

dove la massa m , il momento \vec{p} e la temperatura assoluta T si riferiscono ad una singola particella. Si nota immediatamente che la probabilità dell'intero gas corrisponde al prodotto di N distribuzioni canoniche $\rho_c(\vec{p}_j, \vec{r}_j)$, di ogni particella attorno ad un punto (\vec{p}_j, \vec{r}_j) nello spazio delle fasi, nella forma:

$$\rho_c(\vec{p}_j, \vec{r}_j) = \frac{e^{-\frac{\vec{p}_j^2}{2mKT}}}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} V}$$

Dalla formula risulta che la densità di probabilità di ogni particella è uniforme in \vec{r}_j , cioè non dipende dalla posizione. L'immediata conseguenza è che la densità di particelle N/V si mantiene costante.

Integrando in $d\vec{r}_j$ sull'intero volume si ottiene la distribuzione di probabilità dell'impulso $\rho(\vec{p})$ di ogni particella:

$$\rho(\vec{p}) = \frac{e^{-\frac{\vec{p}^2}{2mKT}}}{(2\pi mKT)^{\frac{3}{2}}} = \prod_{a=x,y,z} \frac{e^{-\frac{p_a^2}{2mKT}}}{(2\pi mKT)^{\frac{1}{2}}}$$

dove nel secondo passaggio si è espresso il valore di \vec{p} nelle sue componenti p_x, p_y, p_z . Si nota, di particolare importanza nel Capitolo 5, che questa distribuzione è il prodotto di tre Gaussiane indipendenti, relative alle componenti cartesiane del momento.

Attraverso un opportuno cambiamento di variabile ($v_a = p_a/m$) si ottiene la distribuzione di Maxwell-Boltzmann per ogni componente della velocità:

$$\rho(v_a) = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_a^2}{2KT}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v_a^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

L'ultima uguaglianza evidenzia chiaramente che la distribuzione è una Gaussiana con valore medio $\langle v_a \rangle = 0$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{KT/m}$. Massimizzando la formula (3.2) si ricava il valore della velocità più probabile:

$$v_0 = \sqrt{2KT/m} = \sqrt{2}\sigma$$

In termini di v_0 la distribuzione rispettivamente delle velocità e di ogni loro componente risultano:

$$\rho(\vec{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2}v_0^3} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} \quad (3.3)$$

$$\rho(v_a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0} e^{-\frac{v_a^2}{v_0^2}}$$

3.2 Risultati

Sfruttando la proprietà che la distribuzione delle velocità di Maxwell è fattorizzabile in tre Gaussiane con media zero e deviazione standard $v_0/\sqrt{2}$, si è realizzato un programma in C++ che crei il grafico delle velocità delle WIMP nel sistema di riferimento del laboratorio, solidale con il Sistema Solare (il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole è trascurabile) e della

galassia. La differenza tra le due distribuzioni sta nel modulo della velocità; il laboratorio è solidale con la Terra e il suo moto attorno alla galassia obbliga ad applicare le trasformazioni di Galileo per passare da un sistema di riferimento all'altro.

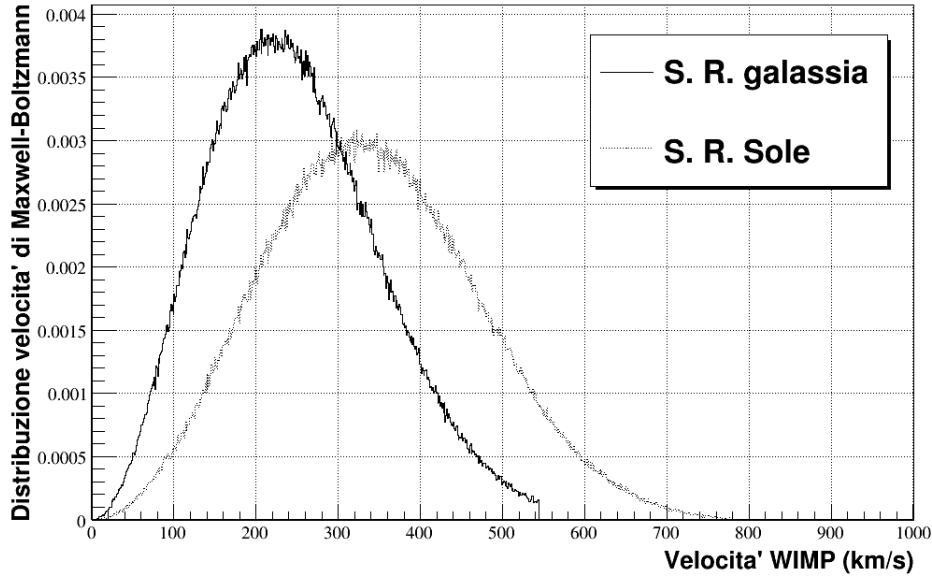
Tutte le “macro” usate per creare il grafico delle distribuzioni della velocità riportate di seguito si basano su tre istogrammi generati da un milione di numeri casuali con probabilità Gaussiana.

3.2.1 Confronto tra le velocità nel sistema del Sole e della galassia

In figura 3.1 si mostrano sovrapposti i due istogrammi della distribuzione della velocità nel riferimento del Sole e della galassia, suddivisi in 1000 bin. Nel grafico relativo al sistema del laboratorio, è stata aggiunta una costante alla componente y della velocità, che vale $v_{Sole} = 250$ km/s. Per l'isotropia spaziale è ininfluenza lungo quale componente si scelga la direzione del moto del Sole attorno alla galassia. Gli altri parametri per la costruzione dell'istogramma sono:

- velocità più probabile $v_0 = 220$ km/s
- velocità di fuga $v_{fuga} = 544$ km/s.

Figura 3.1: Confronto della distribuzione della velocità delle WIMP nel sistema di riferimento del Sole e della galassia. La differenza è dovuta all'aggiunta della costante $v_{Sole}=250$ km/s alla componente y della velocità nel sistema del laboratorio, a causa del moto del Sole rispetto alla galassia.



La distribuzione nel sistema galattico viene fatta solo fino alla velocità di fuga, che è fissata al valore $v_{fuga} = 544$ km/s (in realtà non è esattamente determinata, ma si stima che sia compresa tra 498-608 km/s [16]). Infatti le WIMP con velocità superiori alla velocità di fuga non rimangono intrappolate nella galassia, mentre nel riferimento del laboratorio il moto relativo permette di rivelare WIMP con velocità anche maggiori.

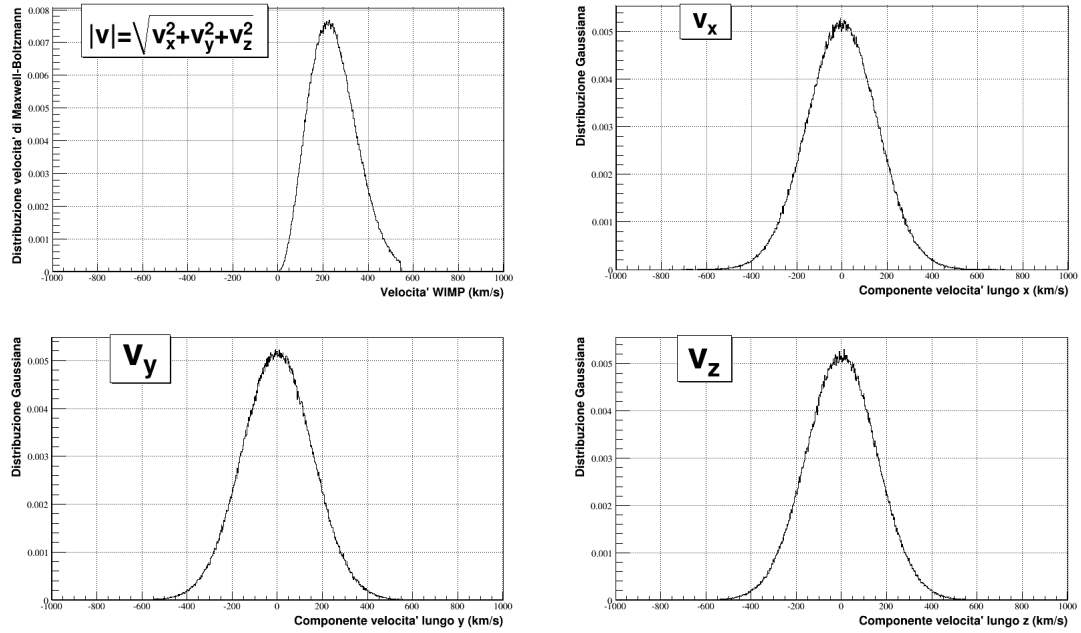
E' stato svolto un controllo dell'andamento della distribuzione di Maxwell con dei grafici relativi a diversi parametri [21]. L'esito risulta corretto.

Componenti della velocità nel sistema del Sole e della galassia

I grafici riportati di seguito dovrebbero ulteriormente chiarire il meccanismo secondo cui dal prodotto di tre Gaussiane si ottiene la distribuzione di

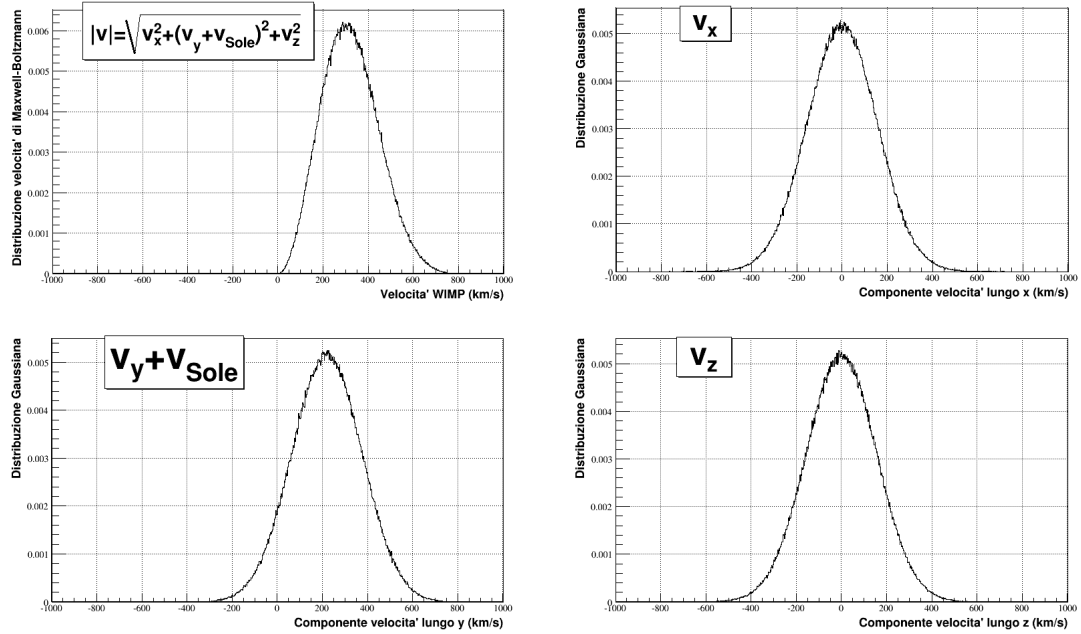
Maxwell-Boltzmann. In figura 3.2 sono rispettivamente confrontati, nel sistema di riferimento della galassia, il modulo della velocità delle WIMP e le sue componenti, lungo l'asse x, y e z. Il modulo delle velocità delle WIMP segue la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, mentre le componenti della velocità hanno probabilità Gaussiana.

Figura 3.2: SISTEMA DI RIFERIMENTO DELLA GALASSIA: distribuzione di Maxwell-Boltzmann del modulo della velocità della WIMP (in alto a sinistra) e distribuzione Gaussiana delle componenti della velocità lungo l'asse x (in alto a destra), y (in basso a sinistra) e z (in basso a destra).



In figura 3.3, invece, vengono riportati 4 grafici analoghi a quelli appena mostrati, ma nel sistema di riferimento del laboratorio (che con buona approssimazione coincide con il Sole).

Figura 3.3: SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL SOLE: distribuzione di Maxwell-Boltzmann del modulo della velocità della WIMP (in alto a sinistra) e distribuzione Gaussiana delle componenti della velocità lungo l'asse x (in alto a destra), y (in basso a sinistra) e z (in basso a destra).



Risulta evidente la differenza delle componenti della velocità lungo l'asse x e z, da quelle lungo l'asse y, che nel sistema di riferimento del laboratorio centrano la Gaussiana in $v_{Sole} = 250$ km/s anziché in zero. Questo comporta uno spostamento nel massimo della distribuzione di Maxwell-Boltzmann, come si è già potuto vedere dalla figura [3.1].

3.2.2 Velocità nel sistema del laboratorio

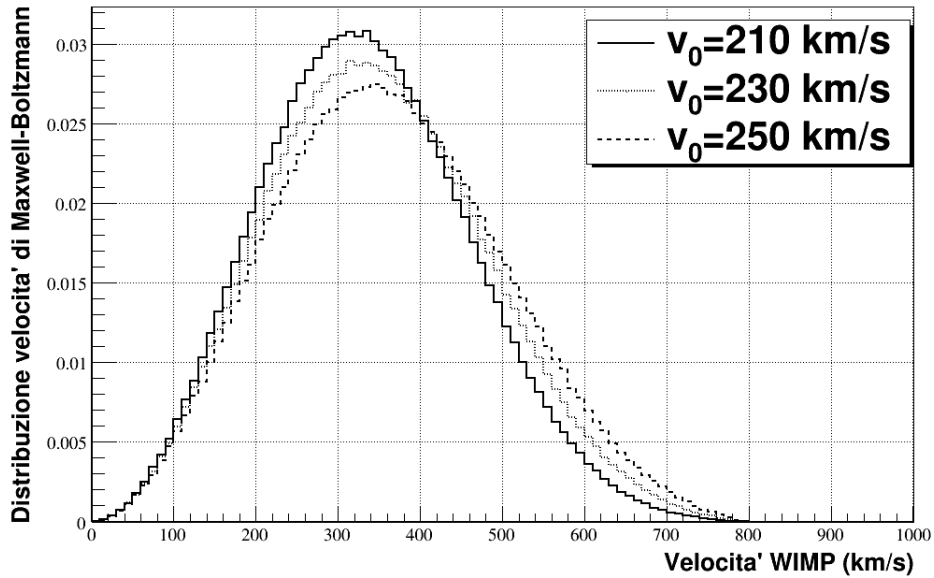
In figura 3.4, 3.5 e 3.6 vengono rispettivamente variare, nel sistema di riferimento del laboratorio (che è ciò a cui la tesi si interessa), la velocità più probabile v_0 , la velocità del Sistema Solare attorno al centro galattico v_{Sole} e la velocità di fuga dalla galassia v_{fuga} .

La “macro” che genera i grafici è simile a quella utilizzata nella sezione precedente, ma il numero di bin in cui sono suddivisi gli istogrammi è stato diminuito a 100, altrimenti si avrebbero grosse difficoltà nel distinguere le tre curve. Questo porta ovviamente ad un aumento nelle frequenze della distribuzione fissato un determinato range di velocità. Ad esempio in figura 3.1 il massimo delle velocità ha una frequenza di 0.003, mentre nei grafici seguenti si arriva fino a 0.03.

In figura 3.4 i parametri utilizzati sono:

- velocità più probabile $v_0 = 210, 230, 250$ km/s
- velocità del laboratorio $v_{Sole} = 250$ km/s
- velocità di fuga della galassia $v_{fuga} = 544$ km/s.

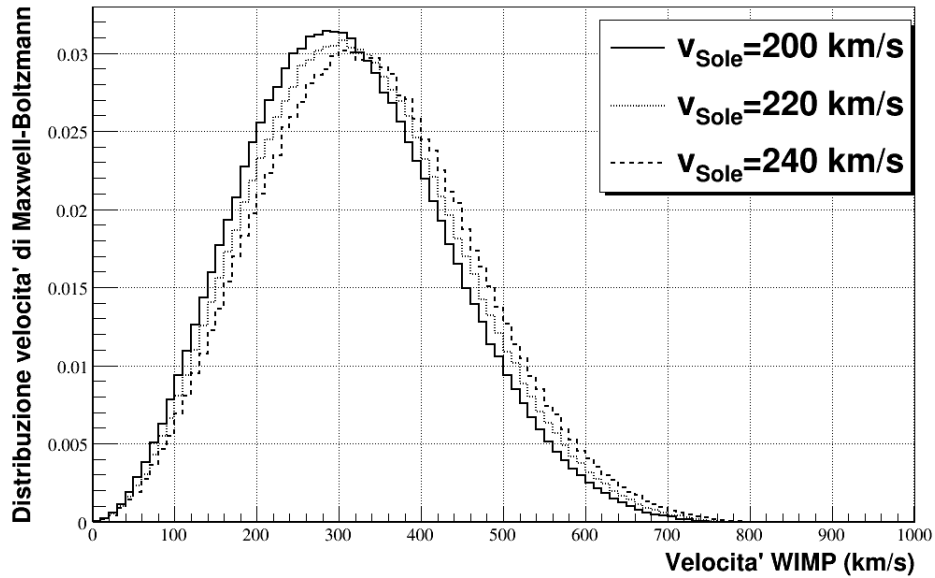
Figura 3.4: Confronto delle distribuzioni di Maxwell-Boltzmann delle velocità delle WIMP incidenti nel sistema di riferimento del laboratorio, per 3 diversi valori della velocità più probabile v_0 .



In figura 3.5 i parametri utilizzati sono:

- velocità più probabile $v_0 = 220$ km/s
- velocità del laboratorio $v_{Sole} = 200, 220, 240$ km/s
- velocità di fuga della galassia $v_{fuga} = 544$ km/s.

Figura 3.5: Confronto delle distribuzioni di Maxwell-Boltzmann delle velocità delle WIMP incidenti nel sistema di riferimento del laboratorio, per 3 diversi valori della velocità del sole v_{Sole} .

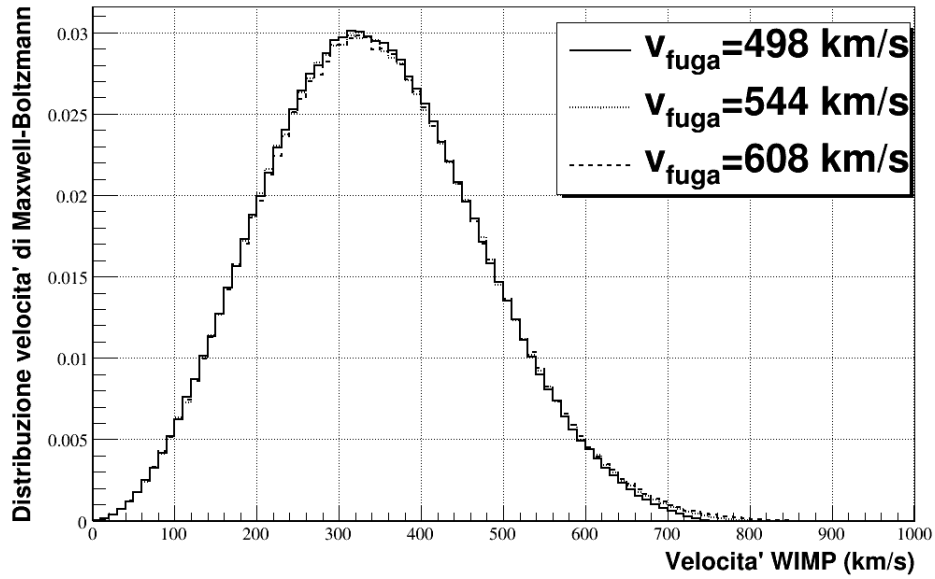


In figura 3.6 i parametri utilizzati sono:

- velocità più probabile $v_0 = 220$ km/s
- velocità del laboratorio $v_{Sole} = 250$ km/s

- velocità di fuga della galassia $v_{fuga} = 498, 544, 608$ km/s.

Figura 3.6: Confronto delle distribuzioni di Maxwell-Boltzmann delle velocità delle WIMP incidenti nel sistema di riferimento del laboratorio, per 3 diversi valori della velocità di fuga della galassia v_{fuga} .



Dai grafici si nota che il confronto delle distribuzioni delle velocità non forniscono risultati molto diversi, specialmente quando viene variata la velocità di fuga della galassia.

Capitolo 4

Fattore di forma

Il fattore di forma si definisce come l'antitrasformata di Fourier della distribuzione di carica o di massa $\rho(\vec{r})$ di un oggetto coinvolto in uno scattering:

$$F(\vec{q}) = \int_V \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{r} \quad (4.1)$$

dove $\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$ è il momento trasferito al bersaglio (in unità di \hbar , per mantenere l'adimensionalità dell'argomento dell'esponente) e \vec{p} è il momento della particella incidente. Il caso a cui la tesi è interessata è lo scattering WIMP-nucleo, dove le WIMP sono i proiettili e il nucleo è il bersaglio.

A seconda dell'andamento del fattore di forma si può determinare un'espressione analitica per la distribuzione $\rho(\vec{r})$, tramite la trasformata di Fourier:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int F(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d\vec{q}$$

Il problema è che le energie delle particelle incidenti sono limitate, perciò il momento trasferito \vec{q} non può assumere valori altissimi e dunque non è possibile determinare la distribuzione $\rho(\vec{r})$ per ogni valore di \vec{r} . La soluzione è di individuare la migliore parametrizzazione di $\rho(\vec{r})$ per poi calcolare il fattore di forma richiesto. La parametrizzazione più comune in fisica nucleare è quella di Fermi, ma in questa tesi verrà utilizzata la

distribuzione di R. H. Helm [25][26], più consona al fenomeno analizzato, per la quale si ottiene come fattore di forma:

$$F(\vec{q}) = 3 \frac{\sin(qR) - (qR) \cos(qR)}{(qR)^3} e^{-\frac{(qs)^2}{2}} \quad (4.2)$$

4.1 Scattering elastico WIMP-nucleo

La sezione d'urto indica la probabilità che un evento di scattering accada. La sezione d'urto differenziale è la probabilità che una particella venga diffusa di un angolo θ , lungo la superficie di un cono di angolo solido Ω . La sezione d'urto differenziale di Rutherford, indipendente dallo spin, si ricava assumendo che la massa del nucleo sia infinita (quindi non rinculi), puntiforme e che il proiettile non sia relativistico:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E)^2 \sin^4 \theta/2}$$

dove z ed E sono rispettivamente la carica e l'energia cinetica del proiettile, Z è il numero atomico del bersaglio e θ è l'angolo di diffusione.

Sperimentalmente, però, il valore che si determina per la sezione d'urto $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{sperim}$ è diverso da quanto trovato con la relazione di Rutherford, ma il loro rapporto equivale ad una quantità nota, cioè al quadrato del fattore di forma:

$$|F(\vec{q})|^2 = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{sperim}}{(d\sigma/d\Omega)_{Rutherford}}$$

Il fattore di forma è quindi una correzione alla sezione d'urto differenziale di Rutherford, dovuta al fatto che il nucleo non ha massa infinita (dunque subirà un rinculo) e la distribuzione di carica non è puntiforme. Nel caso di Rutherford il nucleo non si muove, perciò il momento trasferito \vec{q} è nullo, e inoltre è puntiforme, di conseguenza $\rho(\vec{r})$ si comporta come una delta di Dirac. Sostituendo nella formula (4.1) questi dati, il fattore di forma diventa l'integrale di una delta di Dirac, che vale 1 e quindi si ha uguaglianza tra

sezione d'urto sperimentale e di Rutherford, in perfetto accordo con quanto detto fin ora.

In corrispondenza ai valori più alti dell'energia di rinculo del nucleo, si ha un grande momento trasferito, perciò un grande impulso della particella incidente. Secondo la relazione di De Broglie l'impulso della WIMP diminuisce la sua lunghezza d'onda e quando essa è confrontabile con il raggio R del bersaglio, ovvero $\lambda = \frac{h}{q} \sim R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 \sim 1.2$ fm è il raggio medio di un nucleone e A è il numero di massa del bersaglio), si ottiene diffrazione. Per questo motivo il fattore di forma ha un'andamento tipico della diffrazione nel range delle alte energie di rinculo.

Ai fini di ottenere l'espressione analitica del fattore di forma bisogna integrare in coordinate cilindriche ($\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 dr$) la formula (4.1), dalla quale si ricava:

$$F(\vec{q}) = 2\pi \int_0^R r^2 \rho(r) \int_{-1}^1 e^{iqr \cos\theta} d(\cos\theta) dr = \frac{4\pi}{q} \int_0^R r \sin(qr) \rho(r) dr \quad (4.3)$$

dove la distribuzione di carica è considerata isotropa nello spazio, quindi $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, e il nucleo viene approssimato ad una sfera rigida la cui interazione non dipende dallo spin delle particelle in gioco. Inoltre l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sviluppando in serie di Taylor l'esponenziale, nella condizione che sia $\lambda \gg R$, ovvero $\frac{qR}{h} \ll 1$.

La distribuzione $\rho(r)$ utilizzata nella formula (4.3) per trovare un fattore di forma in accordo con i dati sperimentali è quella di Helm, dalla quale si ricava la relazione finale:

$$F(q) = 3 \frac{\sin(qR) - (qR) \cos(qR)}{(qR)^3} e^{-\frac{(qs)^2}{2}}$$

che è la formula (4.2), dove q segue dall'espressione dall'energia di rinculo $E_R = \frac{q^2}{2m} = \frac{q^2}{2 \cdot 931.494 \cdot A}$, e in unità di \hbar vale $q = 6.92 \cdot 10^3 A^{1/2} (E_R/\text{keV})^{1/2}$, $s \sim 0.9$ fm è la buccia del nucleo, $R/\text{fm} = [c^2 + \frac{7}{3}\pi^2 a^2 - 5s^2]^{1/2}$, con $a \sim 0.52$ fm è il raggio di Bohr e $c/\text{fm} = 1.23A^{1/3} - 0.6$ [25].

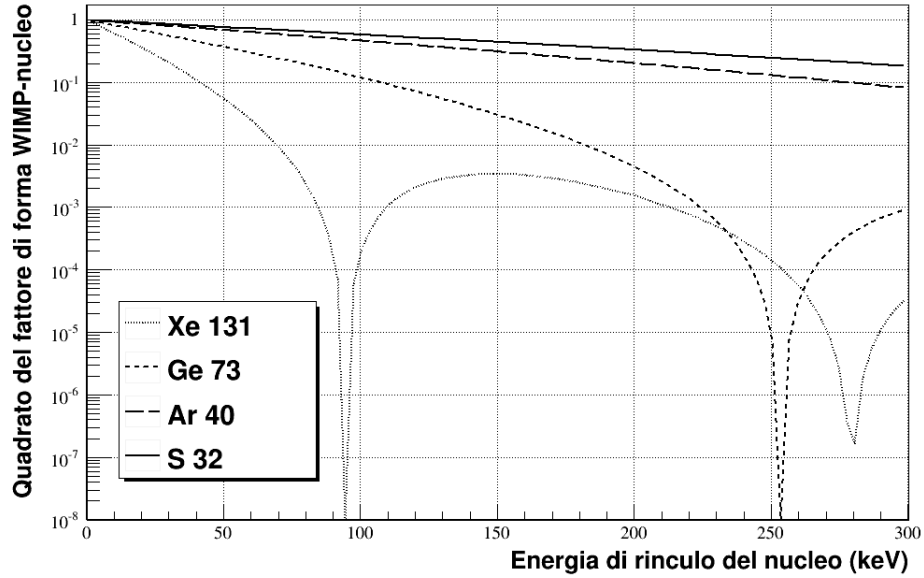
Se la distribuzione fosse stata costante all'interno del nucleo, ovvero $\rho(r) = \rho_0$, integrando per parti l'espressione (4.3), il fattore di forma ottenuto differirebbe dalla formula (4.2) solo per l'assenza dell'esponenziale che indica la buccia del nucleo.

4.2 Risultati

Nei grafici che seguono sono sovrapposti gli andamenti del fattore di forma dei 4 nuclei bersaglio (xeno, germanio, argon, e zolfo) in funzione dell'energia di rinculo, cioè la formula (4.2). Si ricordi che la massa del bersaglio è la media pesata degli isotopi presenti in natura [15]. I parametri utilizzati sono quelli descritti nel Paragrafo 4.1 (tratti dall'articolo di J. D. Lewin e P. F. Smith [25]).

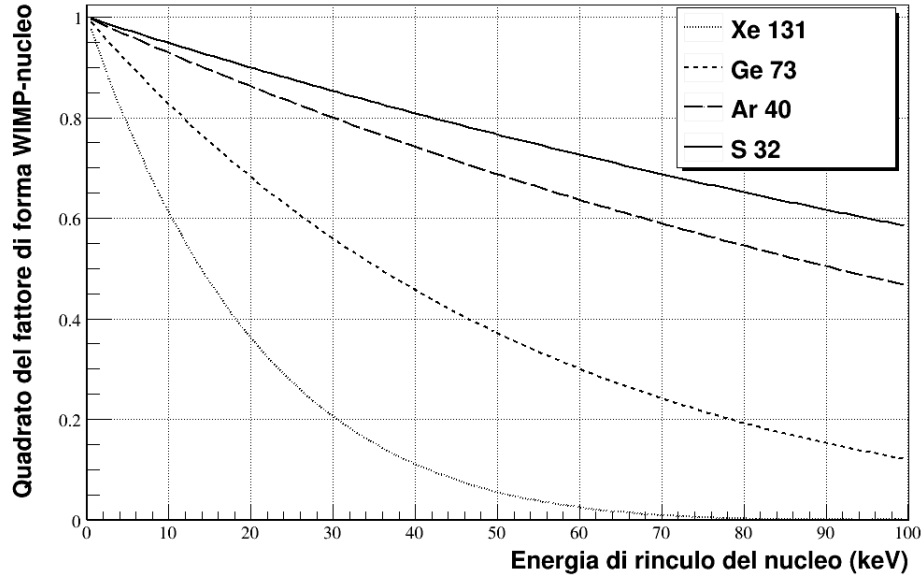
Ai fini di evidenziare la curva tipica della diffrazione, l'intervallo energetico considerato in figura 4.1 è di 0-300 keV e l'asse delle ordinate è in scala logaritmica.

Figura 4.1: Confronto del quadrato dei fattori di forma in scala semilogaritmica dell'interazione WIMP-nucleo, relativi a WIMP di massa $m_\chi=100$ GeV incidenti contro 4 nuclei bersaglio diversi. La variabile che determina l'andamento dei fattori di forma è l'energia di rinculo del nucleo E_R .



In figura 4.2, invece, il grafico non è in scala logaritmica e si sviluppa nell'intervallo energetico di 0-100 keV, in maniera da selezionare l'andamento importante ai fini sperimentali.

Figura 4.2: Confronto del quadrato dei fattori di forma dell'interazione WIMP-nucleo, relativi a WIMP di massa $m_\chi=100$ GeV incidenti contro 4 nuclei bersaglio diversi. La variabile che determina l'andamento dei fattori di forma è l'energia di rinculo del nucleo E_R , sviluppata nel range sperimentale.



I risultati ottenuti confermano quanto scritto in [28].

Capitolo 5

Rate di eventi

Il rate si definisce come il numero di eventi che accadono nell'unità di tempo e di superficie. Ciò che verrà calcolato in questo capitolo è il numero di nuclei bersaglio che rinchiodano a causa dello scattering con le WIMP.

Il rate di eventi è un calcolo probabilistico che si riconduce ad una forma analitica:

$$R_{tot} = NJ\sigma \quad (5.1)$$

dove N è il numero di nuclei presenti nel bersaglio, J è il flusso di particelle incidenti e σ è la sezione d'urto dell'interazione.

Nella tesi si è però interessati a determinare delle formule generali, indipendenti dalla massa del rivelatore; per questo motivo le equazioni riportate di seguito calcoleranno il rate per unità di massa. Dalla (5.1) si ottiene l'espressione del rate per unità di massa, dividendo per la massa totale m_{tot} del bersaglio:

$$R = \frac{R_{tot}}{m_{tot}} = \frac{NJ\sigma}{m_{tot}} \quad (5.2)$$

Successivamente, chi si occuperà di un esperimento, dovrà moltiplicare la formula (5.2) per la massa del materiale bersaglio nel rivelatore, in modo da trovare il valore finale specifico del rate di eventi.

5.1 Rate differenziale e totale

Dalla formula del rate di eventi per unità di massa si ricava il rate differenziale, ovvero il numero di eventi in funzione dell'energia di rinculo per unità di massa del bersaglio.

Prima di tutto bisogna determinare l'espressione dei parametri N e J :

- $N = \frac{m_{tot}}{m_N}$, dove m_{tot} è la massa del materiale bersaglio e m_N è la massa del nucleo bersaglio;
- $J = nv = \frac{\rho_0}{m_\chi} \langle v \rangle$, dove n è la densità delle WIMP incidenti, m_χ è la massa della WIMP e v è la sua velocità nel sistema di riferimento della galassia. Per determinare il valore della velocità serve una distribuzione di probabilità; verrà utilizzata la distribuzione di Maxwell-Boltzmann $\rho(\vec{v})$, esposta nel Capitolo 3.

Sostituendo questi valori nella formula (5.2) il rate di eventi per unità di massa risulta:

$$R = \frac{\rho_0}{m_N m_\chi} \sigma_{sperim} \int_v \rho(\vec{v} + \vec{v}_{Sole}) v d\vec{v}$$

σ_{sperim} è la sezione d'urto ottenuta sperimentalmente, quindi senza le approssimazioni usate da Rutherford. L'estremo inferiore dell'integrale è dato dalla velocità minima v_{min} della WIMP per ottenere una certa energia di rinculo massima E_R , mentre quello superiore dalla velocità di fuga nella galassia. Nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann viene evidenziata la dipendenza dalla velocità del Sole \vec{v}_{Sole} , dunque della Terra, per indicare che il sistema di riferimento è quello del laboratorio. Nel Paragrafo 3.2.1 si è già parlato delle implicazioni che comporta utilizzare come riferimento il laboratorio anziché la galassia.

Il rate differenziale è il numero di nuclei che rinculano con energia E_R , dunque bisogna dividere per essa il rate di eventi:

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_0}{m_N m_\chi} \int_v \rho(\vec{v} + \vec{v}_{Sole}) v d\vec{v} \left(\frac{d\sigma}{dE_R} \right)_{sperim}$$

Si ricordi che la costante di proporzionalità tra la sezione d'urto differenziale sperimentale e quella teorica (Paragrafo 4.1) è il quadrato del fattore di forma della formula (4.2). Inoltre, come già detto, in questa tesi si è interessati all'energia di rinculo massima, più facile da rilevare, che si ha per $\theta' = 180^\circ$. La sezione d'urto differenziale quindi diventa:

$$\left(\frac{d\sigma}{dE_R}\right)_{sperim} = \left(\frac{d\sigma}{dE_R}\right)_{teor} F(q)^2 = \frac{m_N}{2\mu_N^2 v^2} \sigma_{teor}^N F(q)^2 = \frac{m_N}{2\mu_p^2 v^2} \sigma_{teor}^p A^2 F(q)^2$$

Bisogna soffermarsi un momento sull'ultima uguaglianza, dove si è preferito esprimere l'interazione della WIMP con il protone e non con l'intero nucleo, in modo da poter utilizzare la formula con ogni materiale bersaglio, identificato soltanto dal numero di massa A . Infatti, siccome $m_\chi \gg m_N$, approssimativamente vale la seguente relazione tra le masse ridotte WIMP-nucleo μ_N e WIMP-protone μ_p :

$$\mu_N = \frac{m_\chi m_N}{m_\chi + m_N} \sim A\mu_p$$

Inoltre la sezione d'urto si esprime tramite il quadrato di un fattore, detto costante d'accoppiamento, che indica la probabilità di interagire con il bersaglio, quindi dipende dal tipo di bersaglio. Le costanti d'accoppiamento del protone f_p e del neutrone f_n sono considerate identiche, perciò la sezione d'urto del nucleo, che soddisfa le condizioni utilizzate da Rutherford (Paragrafo 4.1), si riduce a:

$$\sigma_{teor}^N = \frac{4\mu_N^2}{\pi} [Zf_p + (A-Z)f_n]^2 \sim \frac{4A^2\mu_p^2}{\pi} A^2 f_p^2 = A^4 \sigma_{teor}^p$$

dove σ_{teor}^p è la sezione d'urto del protone.

In seguito a queste considerazioni il rate di eventi differenziale per unità di massa risulta:

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_0 \sigma_{teor}^p}{2\mu_p^2 m_\chi} A^2 F(q)^2 \int_{v_{min}}^{v_{fuga}} \frac{\rho(\vec{v} + \vec{v}_{Sole})}{v} d\vec{v} \quad (5.3)$$

in cui si considera $c=1$. Secondo le convenzioni utilizzate nella fisica delle particelle, le unità di misura delle masse sono espresse in MeV (ad esempio ρ_0 è in MeV/m^3 , μ_p e m_χ sono in MeV ecc), se non diversamente specificato. L'unità di misura del rate differenziale per unità di massa è dru, cioè $\frac{\text{n}^\circ \text{di eventi}}{\text{giorno} \cdot \text{kg} \cdot \text{keV}}$, perciò i parametri che lo determinano sono stati opportunamente riscritti ai fini del calcolo pratico.

Il passaggio da rate differenziale a totale è immediato: il rate totale per unità di massa si ottiene moltiplicando il rate differenziale, per l'intervallo energetico $[E_{Rmin}, E_{Rmax}]$ per cui si vuole conoscere il numero di eventi. Basta quindi integrare in dE_R la formula (5.3):

$$R = \int_{E_{Rmin}}^{E_{Rmax}} \frac{dR}{dE_R} dE_R \quad (5.4)$$

5.2 Risultati

5.2.1 Rate differenziale

I grafici che seguono sono un confronto di rate differenziali per unità di massa, formula (5.3). In ognuno di essi viene variato un solo parametro, quindi le “macro” in C++ che generano il risultato sono tutte uguali tra loro, con la ripetizione della sola parte che coinvolge tale parametro. Ai fini di visualizzare meglio l'andamento del rate la scala usata per l'asse y è sempre logaritmica.

Ogni rate differenziale è stato confrontato graficamente e numericamente con il sito web [32] con risultati concordi.

I parametri mantenuti costanti nei grafici di seguito sono:

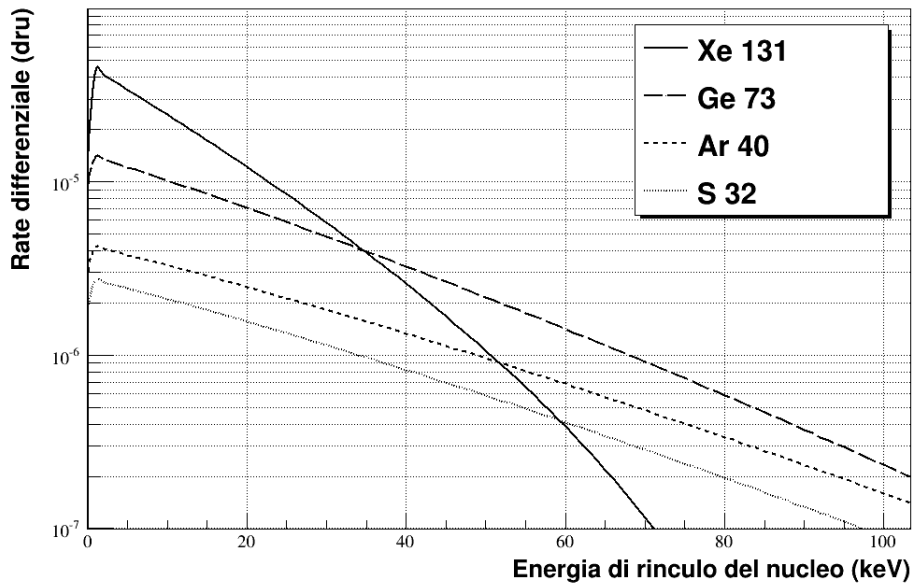
- densità di WIMP $\rho_0 = 300 \text{ MeV}/cm^2$
- sezione d'urto WIMP-protone $\sigma_{teor}^p = 10^{-45} cm^2$, che è attualmente il limite superiore ottenuto da diversi esperimenti.

Le altre quantità invece, quando non vengono coinvolte nel confronto diretto, si mantengono al valore di:

- massa del nucleo bersaglio $m_N = 131 \cdot 931.494$ MeV (tipica dello Xe)
- massa della WIMP $m_\chi = 100$ GeV
- velocità massima attesa delle WIMP $v_0 = 220$ km/s
- velocità del Sole attorno alla galassia $v_{Sole} = 250$ km/s
- velocità di fuga dalla galassia $v_{fuga} = 544$ km/s.

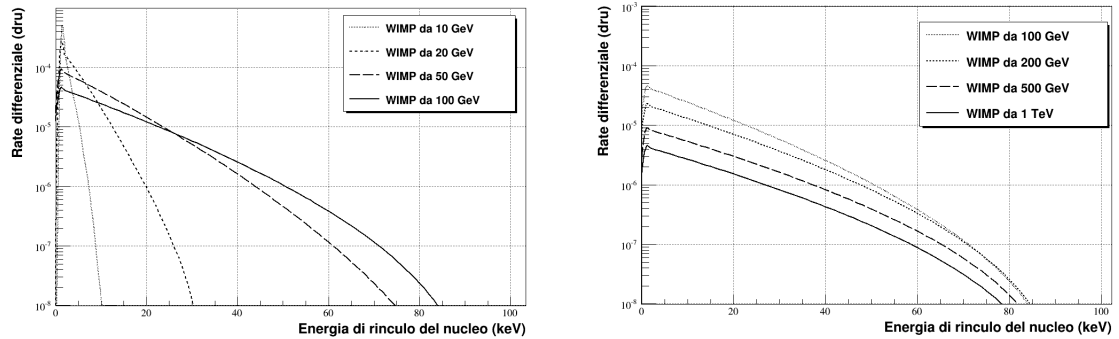
In figura 5.1 è riportato il grafico dei rate differenziali di 4 materiali bersaglio: lo xenio, il germanio, l'argon e lo zolfo. Il parametro che quindi viene variato è solamente il numero di massa A del nucleo. Si è volutamente considerato il range di energie utilizzate sperimentalmente, che va da qualche keV a poco meno di un centinaio di keV.

Figura 5.1: Rate differenziale per unità di massa in funzione dell'energia di rinculo di 4 nuclei bersaglio: xenio, germanio, argon e zolfo. La scala utilizzata sull'asse y è semilogaritmica e il range di energia entro cui si sviluppa il grafico è quello sperimentale.



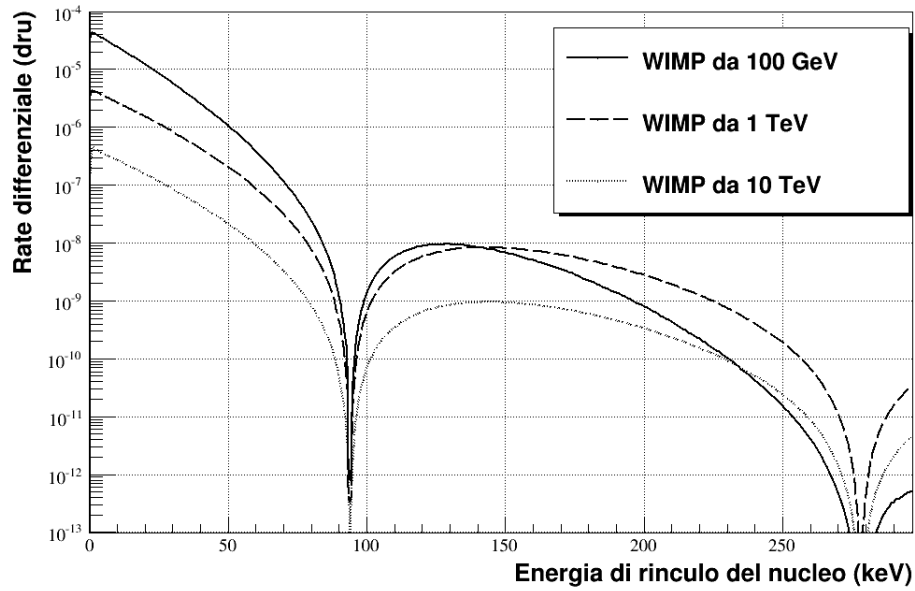
In figura 5.2 vengono confrontati i rate differenziali di sette possibili valori della massa della WIMP m_χ : 10 GeV, 20 GeV, 50 GeV, 100 GeV, 200 GeV, 500 GeV e 1 TeV. L'intervallo energetico in cui si estende il grafico arriva fino a circa 100 keV, poichè i bassi valori della massa della WIMP aumentano la velocità minima della WIMP per ottenere una certa energia di rinculo massima del nucleo E_R e ovviamente la velocità minima si dovrà mantenere al di sotto della velocità di fuga v_{fuga} . Siccome $v_{min} \propto \sqrt{E_R}$, per valori dell'energia di rinculo superiori a 100 keV diventerebbe $v_{min} > v_{fuga}$ e quindi il rate differenziale risulterebbe errato.

Figura 5.2: Confronto dei rate differenziali per unità di massa delle WIMP incidenti con 7 masse m_χ diverse, in funzione dell'energia di rinculo dei nuclei di xeno. La scala sull'asse y è semilogaritmica. L'intervallo energetico permesso dal rate arriva fino a circa 100 keV.



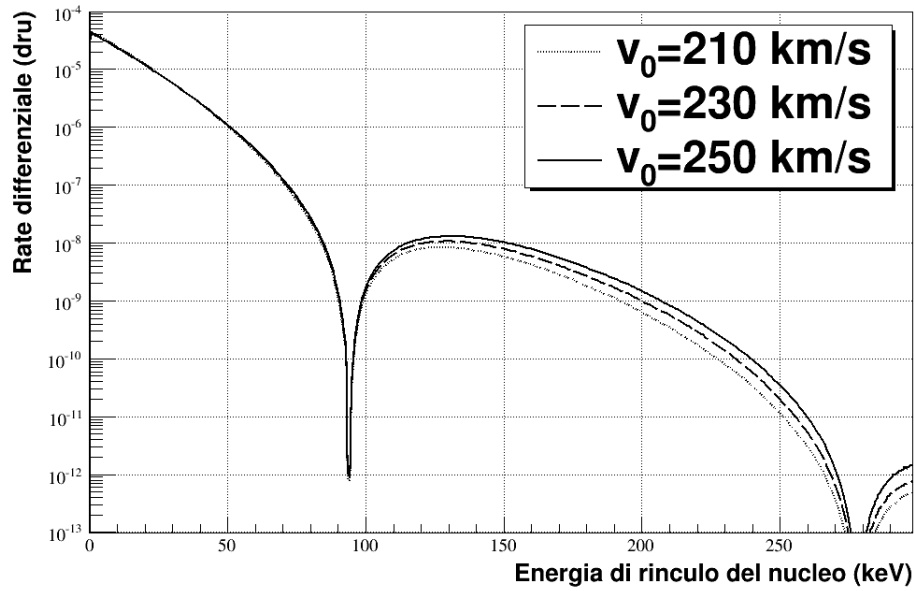
In figura 5.3 sono confrontati i rate differenziali relativi a 3 valori della massa della WIMP m_χ : 100 GeV, 1 TeV e 10 TeV. Questa volta la massa della WIMP è sufficiente ad evitare il problema di una velocità minima troppo alta, perciò il range di energia utilizzato per questo e per tutti i grafici successivi arriva fino a circa 300 keV. In questo modo è anche possibile riconoscere l'andamento del quadrato del fattore di forma, simile a quello della diffrazione.

Figura 5.3: Confronto dei rate differenziali per unità di massa delle WIMP incidenti con 3 masse m_χ diverse, in funzione dell'energia di rinculo dei nuclei di xeno. La scala sull'asse y è semilogaritmica.



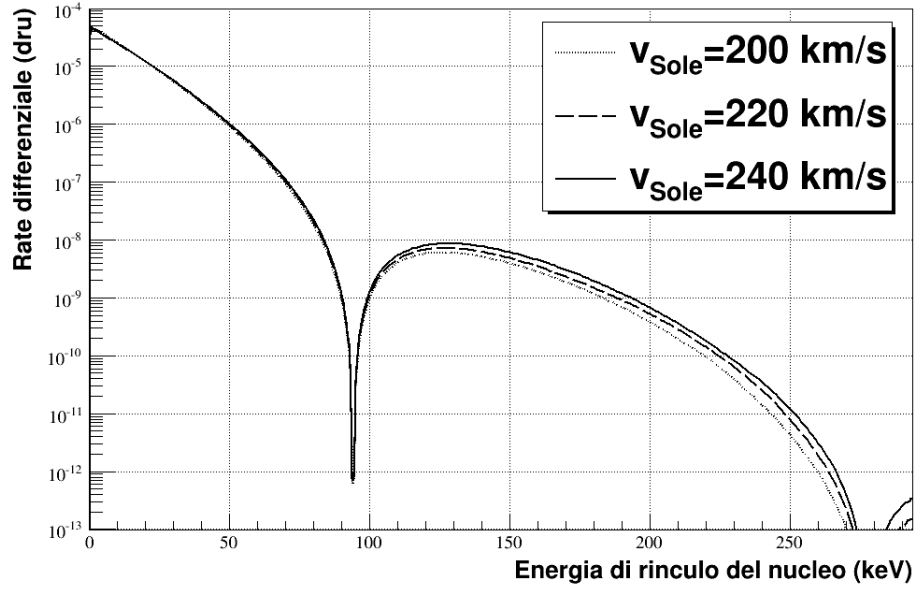
In figura 5.4 vengono confrontati 3 rate differenziali relativi a 3 valori della velocità più probabile v_0 delle WIMP, utilizzata nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann (Capitolo 3): 210 km/s, 230 km/s, 250 km/s.

Figura 5.4: Confronto dei rate differenziali per unità di massa delle WIMP incidenti con velocità v_0 più probabili diverse, in funzione dell'energia di rinculo dei nuclei di xeno. La scala sull'asse y è semilogaritmica.



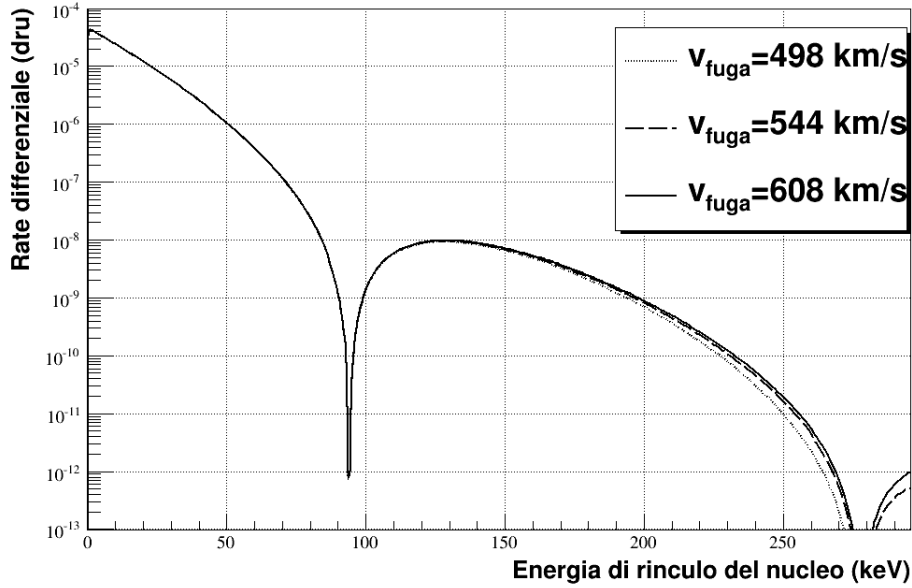
In figura 5.6 è riportato il grafico di 3 rate differenziali relativi a 3 valori della velocità della Terra attorno alla galassia v_{Sole} , che coincide approssimativamente con quella del Sole: 200 km/s, 220 km/s, 240 km/s.

Figura 5.5: Confronto dei rate differenziali per unità di massa delle WIMP incidenti, riferite a 3 diversi valori della velocità v_{Sole} del sistema di riferimento del Sole, in funzione dell'energia di rinculo dei nuclei di xeno. La scala sull'asse y è semilogaritmica.



In figura 5.6 vengono confrontati 3 rate differenziali relativi a 3 valori della velocità dei fuga v_{fuga} delle WIMP dalla galassia: 498 km/s, 544 km/s, 608 km/s.

Figura 5.6: Confronto dei rate differenziali per unità di massa delle WIMP incidenti con 3 diverse velocità di fuga v_{fuga} dalla galassia, in funzione dell'energia di rinculo dei nuclei di xeno. La scala sull'asse y è semilogaritmica.



Si noti che i rate differenziali che confrontano i parametri velocità sono quasi sovrapposti nel range delle energie sperimentali. Ciò è in accordo con i grafici della sezione 3.2.2, che variano poco con la velocità. Invece i parametri che coinvolgono le masse cambiano notevolmente il risultato finale.

5.2.2 Rate totale

Nelle tabelle di seguito sono riportati i valori del rate totale per unità di massa, utilizzando la formula (5.4). Questi si trovano per mezzo di una “macro”, scritta in C++, che svolge una somma cumulativa del rate differenziale nell'intervallo di energia desiderato. I 3 range considerati sono: 0-100 keV, 10-50 keV e 30-50 keV. Il primo intervallo è quello tipico degli esperi-

menti, il secondo è il più probabile, mentre il terzo, rispetto al secondo, ci si aspetta che conti un numero di eventi minore.

In tabella 5.1, 5.3 e 5.4 sono riportati i 3 range relativi rispettivamente a varie masse del nucleo bersaglio, della WIMP incidente e ai parametri della sua velocità, in modo da poter verificare direttamente quanto fatto nei grafici precedenti.

Tabella 5.1: Rate totali in unità di massa del rivelatore a seconda dei valori delle masse del nucleo bersaglio m_N .

	Rate totale ($\cdot 10^{-4} \frac{\text{n}^\circ \text{ di eventi}}{\text{giorno} \cdot \text{kg}}$)			
	$m_N (\cdot 931.494 \text{ MeV})$			
	131	73	40	32
0 – 100keV	6.50	3.70	1.36	0.849
10 – 50keV	3.09	2.07	0.76	0.477
30 – 50keV	0.55	0.65	0.265	0.164

Tabella 5.3: Rate totali in unità di massa del rivelatore a seconda dei valori delle masse della WIMP incidente m_χ .

	Rate totale ($\cdot 10^{-4} \frac{\text{n}^\circ \text{ di eventi}}{\text{giorno} \cdot \text{kg}}$)							
	$m_\chi (\text{GeV})$							
	10	20	50	100	200	500	1000	10000
0 – 100keV	2.3	7.2	8.8	6.50	3.3	1.39	0.77	0.078
10 – 50keV	0	0.59	3.63	3.09	1.83	0.789	0.402	0.041
30 – 50keV	0	10^4	0.38	0.55	0.38	0.173	0.089	0.0092

Tabella 5.4: Rate totali in unità di massa del rivelatore a seconda dei valori della velocità più probabile della WIMP incidente v_0 , della velocità del laboratorio v_{Sole} e della velocità di fuga dalla galassia v_{fuga} .

	Rate totale ($\cdot 10^{-4} \frac{\text{n}^\circ \text{ di eventi}}{\text{giorno} \cdot \text{kg}}$)								
	v_0 (km/s)			v_{Sole} (km/s)			v_{fuga} (km/s)		
	210	230	250	200	220	240	498	544	608
0 – 100keV	6.58	6.43	6.30	6.78	6.67	6.6	6.53	6.50	6.49
10 – 50keV	3.11	3.06	3.02	3.07	3.08	3.09	3.09	3.09	3.08
30 – 50keV	0.55	0.55	0.56	0.50	0.52	0.54	0.55	0.55	0.55

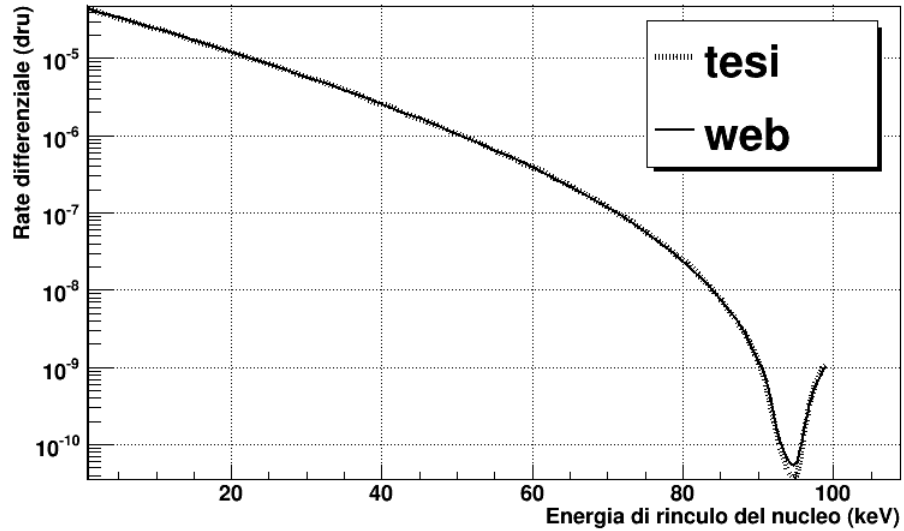
Come già notato nella sezione relativa al rate differenziale, anche nel rate totale si ha maggiore sensibilità alla variazione di parametri di massa, piuttosto che di velocità.

5.2.3 Confronto dei risultati

Nel sito web [32] sono tabulati i risultati grafici e numerici del rate di eventi differenziale, a seconda dei parametri in considerazione. E' stato così possibile svolgere un confronto con i valori trovati nella tesi.

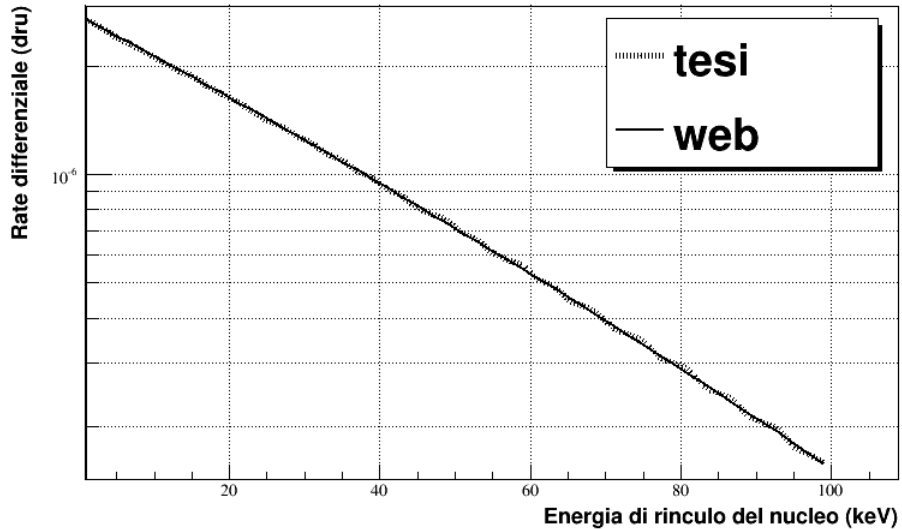
In figura 5.7 sono sovrapposti i due grafici della “macro” scritta con “ROOT” e i valori presi dal sito web del rate differenziale di eventi di una WIMP di massa $m_\chi = 100$ GeV, contro un nucleo bersaglio di xeno ($A=131.3$). I parametri che contribuiscono al rate sono fissati al valore utilizzato nella sezione precedente. La scala sull'asse y in questo e nel prossimo grafico è semilogaritmica, altrimenti non si noterebbe alcuna differenza tra le due linee.

Figura 5.7: Confronto del rate differenziale di eventi di una WIMP di massa $m_\chi=100$ GeV contro un nucleo di xeno, calcolato con “ROOT” e tramite il sito web [32]. La scala semilogaritmica sull’asse y permette di evidenziare la differenza tra le curve.



In figura 5.8 vengono confrontati i rate differenziali calcolati con la “macro” e tramite il sito web, relativi ad una WIMP di massa $m_\chi=500$ GeV incidente contro un nucleo bersaglio di germanio ($A=72.6$). I parametri che vengono variati rispetto al caso precedente sono la velocità massima della WIMP $v_0=230$ km/s e la velocità di fuga dalla galassia $v_{fuga}=600$ km/s.

Figura 5.8: Confronto del rate differenziale di eventi di una WIMP di massa $m_\chi=500$ GeV contro un nucleo di germanio, calcolato con “ROOT” e tramite il sito web [32]. La scala semilogaritmica sull’asse y permette di evidenziare la differenza tra le curve.



Poichè il sito ha tabulati rate differenziali compresi tra 1-99 keV, questo intervallo ha definito il limite energetico in cui sono stati sviluppati i grafici. Inoltre il sito riporta soltanto 50 valori numerici del rate, quindi per un migliore confronto anche la “macro” è stata gestita in modo da interpolare 50 dati. Probabilmente è per questo motivo che la “macro” non presenta una linea continua, ma leggermente spezzata.

La scelta di usare una linea tratteggiata grossa per il rate tabulato e una linea continua sottile per il rate creato dalla “macro” è dovuta alla difficoltà di distinguere i due tratti se questi fossero stati dello stesso spessore, poichè generalmente coincidono. Ciò significa che i risultati della tesi appaiono con buona approssimazione corretti.

Nella seguente tabella vengono riportati i valori numerici dei rate differenziali che sono stati interpolati nei grafici 5.7 e 5.8 relativi a 10 diverse

energie di rinculo del nucleo E_R .

Tabella 5.5: Confronto numerico del rate differenziale di eventi per una WIMP di $m_\chi=100$ GeV contro un bersaglio di xeno (sinistra) e una di massa $m_\chi=500$ GeV contro un bersaglio di germanio (destra). Il rate differenziale viene calcolato tramite una “macro” scritta con “ROOT” e per mezzo dei valori tabulati nel sito web [32].

E_R (keV)	Rate diff Xe ($\cdot 10^{-5}$ dru)		E_R (keV)	Rate diff Ge ($\cdot 10^{-6}$ dru)	
	web	tesi		web	tesi
9	2.61	2.58	9	2.18	2.18
19	1.31	1.29	19	1.68	1.67
29	0.624	0.623	29	1.28	1.27
39	0.28	0.275	39	$9.7 \cdot 10^{-1}$	$9.781 \cdot 10^{-1}$
49	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$	49	$7.3 \cdot 10^{-1}$	$7.42 \cdot 10^{-1}$
59	$4.3 \cdot 10^{-2}$	$4.25 \cdot 10^{-2}$	59	$5.46 \cdot 10^{-1}$	$5.56 \cdot 10^{-1}$
69	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$	69	$4.05 \cdot 10^{-1}$	$4.11 \cdot 10^{-1}$
79	$2.88 \cdot 10^{-3}$	$2.88 \cdot 10^{-3}$	79	$2.98 \cdot 10^{-1}$	$2.99 \cdot 10^{-1}$
89	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	89	$2.18 \cdot 10^{-1}$	$2.13 \cdot 10^{-1}$
99	$1.02 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	99	$1.58 \cdot 10^{-1}$	$1.59 \cdot 10^{-1}$

Con questo confronto numerico è stato possibile verificare l’esattezza dei risultati ottenuti.

Capitolo 6

Conclusioni

Il problema del calcolo del rate di eventi differenziale e totale per unità di massa è stato affrontato suddividendo in parti le due formule finali utilizzate, che sono rispettivamente la (5.3) e la (5.4). Un particolare riguardo viene dato al bersaglio di xeno e a WIMP con massa $m_\chi = 100$ GeV, densità $\rho_0 = 300$ MeV/cm³, velocità più probabile $v_0 = 220$ km/s, velocità del Sistema Solare attorno alla galassia di $v_{Sole} = 250$ km/s e velocità di fuga della WIMP dalla galassia di $v_{fuga} = 544$ km/s [30].

Prima di tutto, siccome le energie in gioco sono molto basse, si è valutata la massima energia di rinculo del nucleo bersaglio che ci si attende rivelare. Essa dipende dalla velocità delle WIMP, che non assume un valore ben preciso, ma soddisfa la distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann, tipica dei gas nel limite semiclassico.

Successivamente, per una maggiore corrispondenza con la realtà, si è studiato il fattore di forma, che indica che il nucleo bersaglio non è puntiforme e non ha massa infinita, perciò può rinculare. Per grandi valori della quantità di moto della WIMP \vec{p} , l'andamento del fattore di forma con l'energia di rinculo è quello tipico della diffrazione. In questo caso il nucleo si comporta come un disco opaco su cui incide un'onda con lunghezza d'onda data dalla relazione di de Broglie, che fornisce una condizione su \vec{p} :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Questi elementi sono poi stati utilizzati per calcolare il rate differenziale e totale per unità di massa nell'intervallo di energia tipico del rivelatore, prendendo come riferimento quello che contiene un bersaglio di xeno, nell'esperimento ai LNGS. Nella tesi vengono confrontate alcune importanti grandezze (energia di rinculo del nucleo bersaglio, velocità delle WIMP, fattore di forma, rate di eventi) variando di volta in volta solo un parametro, in modo da poter costituire un piccolo dataset.

I valori sia grafici che numerici del rate di eventi sono in ottimo accordo con i risultati ottenuti tramite il programma disponibile sul sito web [32], in cui è possibile modificare i parametri considerati. Si può quindi concludere che i calcoli sviluppati in questo lavoro di tesi siano essenzialmente corretti.

Bibliografia

- [1] R. d'Inverno, *Introduzione alla Relativita' di Einstein*, Clueb, Bologna 2001
- [2] Supernova Cosmology Project, panisse.lbl.gov
- [3] P. J. E. Peebles, *Principles of physical cosmology*, Princeton, New Jersey: Princeton University press, 1993
- [4] B. Caccianiga, *La Materia Oscura, Corso di Introduzione all'Astrofisica*, 2009-2010
- [5] Richard Mushotzky's Home Page, lheawww.gsfc.nasa.gov/users/richard
- [6] La Materia Oscura, www.scienzagiovane.unibo.it/darkmatter.html
- [7] SCIS La materia Oscura, scis.uai.it/cosmologia/matoscura.htm
- [8] J. Bahcall T. Piran S. Weinberg, *Dark matter in the universe: Jerusalem winter school for theoretical physics*, Singapore: World scientific, 1987
- [9] K. Gottfried V. F. Weisskopf, *Concepts of particle physics*, Oxford: Clarendon press; New York: Oxford University press, 1984-1986
- [10] R. K. Ellis, *Quantum Chromodynamics*, Fermilab, 2005
- [11] S. Braibant G. Giacomelli M. Spurio, *Particelle e interazioni fondamentali: il mondo delle particelle*, Milano: Springer, 2009
- [12] E. Aprile et al., *The XENON100 Dark Matter Experiment*, Astroparticle Physics, 2011

- [13] G. Turchetti, *Dinamica classica dei sistemi fisici*, Bologna: Zanichelli, 1998
- [14] ROOT, A Data Analysis Framework, <http://root.cern.ch/drupal>
- [15] Exact Masses and Isotopic Abundances of Elements, Numeric List, www.sisweb.com/referenc/source/exactmas.htm
- [16] M. C. Smith et al., The RAVE survey: constraining the local Galactic escape speed, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **379**, 755–772, 2007
- [17] E.I. Gates G. Gyuk M.S. Turner, The Local Halo Density, *The Astrophysical Journal*, **449**, L123, 1995
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical physics*, Paris: Pergamon press, 1959
- [19] F. Donato N. Fornengo S. Scopel, Effects of galactic dark halo rotation on WIMP direct detection, *Astroparticle Physics* **9** 247-260, 1998
- [20] J. D. Vergados D. Owen, Direct dark matter event rates with a velocity distribution in the Eddington approach, *Physical Review D* **75**, 2007
- [21] A. M. Green, Dependence of direct detection signals on the WIMP velocity distribution, arXiv: 1009.0916v1, 2010
- [22] M. Drees, *WIMP Velocity Distribution and Mass from Direct Detection Experiments*, Bonn University
- [23] B. Povh K. Rith C. Scholz F. Zetsche, *Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts*, Berlin: Springer, 1995
- [24] K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*, New York: Wiley, 1988
- [25] J.D. Lewin P.F. Smith, Review of mathematics, numerical factors, and correction for dark matter experiments based on elastic nuclear recoil, *Astroparticle Physics* **6** 87-112, 1996

- [26] R. H. Helm, Inelastic and elastic scattering of 187-MeV Electrons from Selected Even-Even nuclei, *Physical Review*, Vol 104, n 5, 1956
- [27] J. Engel, Nuclear form factors for the scattering of weakly interacting massive particles, *Physics Letters B*, Vol 264, n 1.2, 1991
- [28] K. Ni L. Baudis, Direct dark matter searches with CDMS and XENON, *Advances in Space Research*, Vol 41, n 12, 2008
- [29] E. Aprile, Direct Dark Matter Searches, Columbia University: Summer School, 2009
- [30] M. Pato L. Baudis G. Bertone R. R. de Austri L. E. Strigari R. Trotta, Complementary of Dark Matter Direct Detection Targets, arXiv: 1012.3458v1, 2010
- [31] K. Arisaka M. Lam UCLA Group, XENON1T Dark Matter Sensitivities and Background Estimates, University of California, Los Angeles, Department of Physics and Astronomy, 2011
- [32] Dark matter online tools, pisrv0.pit.physik.uni-tuebingen.de/darkmatter/spectra/index.php